

Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2013

andrzej.lachwa@uj.edu.pl

14/15

Grafy – podstawowe definicje

Graf to para $G=(V, E)$, gdzie V to niepusty i skończony zbiór, którego elementy nazywamy **wierzchołkami** lub wężłami, E to skończony zbiór z powtórzeniami jedno i dwuelementowych podzbiorów V , zwanych **krawędziami**.

Jednoelementowe podzbiory V nazywamy **pętlami**, a podzbiory powtarzające się nazywamy **krawędziami wielokrotnymi**.

Graf prosty to graf $G=(V, E)$, w którym E jest zbiorem dwuelementowych podzbiorów V .

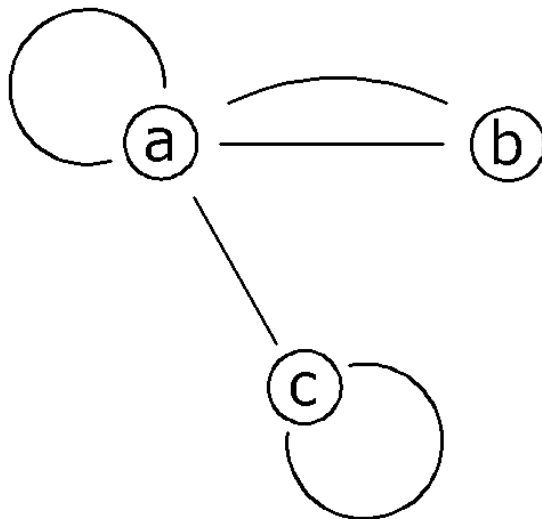
A zatem graf prosty to graf bez pętli i bez krawędzi wielokrotnych.

Krawędź łącząca v z w oznaczana będzie jako vw . Jeśli istnieje krawędź vw to mówimy, że v i w są **sąsiadami**; oraz że krawędź vw jest **incydentna** do v oraz incydentna do w . Podobnie dwie krawędzie nazywamy **sąsiednimi** jeżeli mają wspólny wierzchołek. Ponadto, dla grafu G symbolem $V(G)$ będziemy oznaczać jego zbiór wierzchołków, zaś symbolem $E(G)$ jego zbiór (lub zbiór z powtórzeniami) krawędzi. Czasem, dla odróżnienia grafu od grafu prostego, graf będziemy nazywać też *grafem ogólnym*.

Często spotyka się w literaturze definicję, że **stopień wierzchołka v** w grafie G to liczba krawędzi incydentnych z v . **Definicja powyższa jest poprawna jedynie dla grafów prostych.** W grafie ogólnym stopień wierzchołka v trzeba zdefiniować inaczej, a mianowicie, że jest to suma podwojonej liczby pętli $\{v\}$ i liczby krawędzi $\{v, w\}$ nie będących pętlami.

Stopień wierzchołka v oznaczany jest jako $\deg(v)$ lub $\deg v$.

Przykład: graf ogólny



$$\deg(a)=5$$

$$\deg(b)=2$$

$$\deg(c)=3$$

$$G = (V, E)$$

$$V = \{a, b, c\}$$

$$E = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c\}\}$$

Twierdzenie

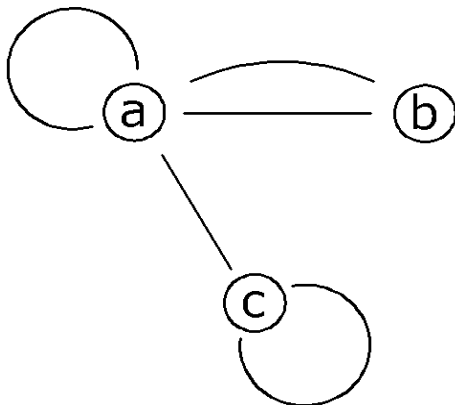
Jeśli $G=(V, E)$ jest grafem ogólnym, to $\sum_{v \in V} \deg v = 2 |E|$.

Wniosek: liczba wierzchołków o nieparzystym stopniu jest parzysta.

Dowód

Każda krawędź, która nie jest pętlą, jest incydentna do dwóch wierzchołków. Zliczając krawędzie incydentne do kolejnych wierzchołków, a następnie sumując te wartości, każda krawędź vw zostanie zliczona dwa razy: raz przy rozpatrywaniu wierzchołka v , a drugi raz przy w . Pętla zawsze liczone są podwójnie. Zatem mamy podwojoną liczbę krawędzi.

Ciąg stopni grafu to ciąg stopni wierzchołków w kolejności wzrastającej, z uwzględnieniem powtórzeń, np. dla grafu poniżej jest to ciąg (2,3,5)



Dla grafów prostych $G=(V, E)$, $G_1=(V_1, E_1)$, $G_2=(V_2, E_2)$ definiujemy następujące pojęcia:

- **suma grafów** $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$,
- **przecięcie grafów** $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$,
- **różnica grafów** $G_1 - G_2 = (V_1 - V_2, E_1 - E_2)$,
- **podgraf** grafu G to graf H , w którym $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$,

które nie budzą żadnych wątpliwości interpretacyjnych. W przypadku grafów ogólnych sprawa nie jest już taka prosta. Zbiory E , E_1 , E_2 są wówczas zbiorami z powtórzeniami.

Skończony **zbiór z powtórzeniami** $X = \underbrace{\langle x_1, x_1, \dots, x_1 \rangle}_{k_1} \underbrace{\langle x_2, x_2, \dots, x_2 \rangle}_{k_2} \underbrace{\langle x_3, x_3, \dots, x_3 \rangle}_{k_3} \dots \underbrace{\langle x_n, x_n, \dots, x_n \rangle}_{k_n}$

to rodzina elementów, w której x_1 powtarza się k_1 razy, x_2 powtarza się k_2 razy, itd. aż do x_n które powtarza się k_n razy. Zbiór taki zapisujemy również w postaci $X = \langle k_1 * x_1, k_2 * x_2, k_3 * x_3, \dots, k_n * x_n \rangle$, a liczby $k_1, k_2, \dots, k_n$ nazywamy krotnościami. Inny sposób zapisania takiego zbioru to:
 $X = \langle \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}, \{(x_1, k_1), (x_2, k_2), \dots, (x_n, k_n)\} \rangle$.

Moc zbioru z powtórzeniami to suma krotności jego elementów.

Przypomnijmy, że podzbiór skończonego zbioru z powtórzeniami $X = \langle k_1 * x_1, k_2 * x_2, \dots, k_n * x_n \rangle$ może być wyznaczony przez wektor $(m_1, m_2, \dots, m_n)$, gdzie $0 \leq m_1 \leq k_1, 0 \leq m_2 \leq k_2, \dots, 0 \leq m_n \leq k_n$. Liczba podzbiorów skończonego zbioru z powtórzeniami o krotnościach $k_1, k_2, \dots, k_n$ jest równa $(k_1+1)(k_2+1) \dots (k_n+1)$.

Suma dwóch zbiorów z powtórzeniami jest tworzona przez określenie krotności każdego elementu w sumie jako maksimum krotności tego elementu w składnikach sumy. Odpowiednio dla iloczynu będzie to minimum krotności, a dla różnicy – ograniczona (od dołu przez 0) różnica krotności.

W przypadku takich zbiorów można również mówić o „krotnościowej” sumie zbiorów, w której krotność elementu to suma algebraiczna krotności tego elementu w składnikach.

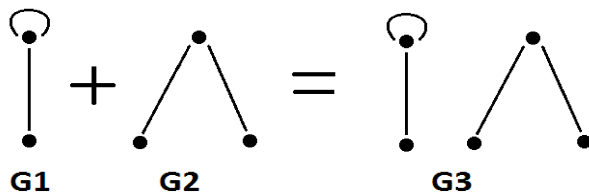
Przykład: $\langle a, a, b, c \rangle \oplus \langle a, b, b \rangle = \langle a, a, a, b, b, b, c \rangle$

Dla grafów ogólnych $G_1=(V_1, E_1)$, $G_2=(V_2, E_2)$ **suma grafów** $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, przy czym druga operacja sumy dotyczy zbiorów z powtórzeniami.

Podobnie trzeba zdefiniować iloczyn grafów ogólnych i różnicę grafów ogólnych, a także w miarę potrzeb sumę „krotnościową” grafów.

Podgraf grafu ogólnego $G=(V, E)$ to graf ogólny H , w którym $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$, ale to drugie zawieranie jest operacją zawierania się zbiorów z powtórzeniami.

W literaturze spotykamy ponadto operację sumy, którą nazwiemy tu sumą prostą, a która jest operacją łączenia dwóch grafów o rozłącznych zbiorach wierzchołków. Pojęcie sumy prostej pozwala na wprowadzenie definicji grafu spójnego jako grafu, którego nie da się przedstawić jako sumy prostej dwóch grafów. Natomiast graf niespójny da się przedstawić jako sumę prostą grafów spójnych, zwanych wówczas jest składowymi.



W tym wykładzie definicja grafu spójnego będzie korzystać z innej własności.

Restrykcja grafu prostego $G=(V, E)$ do podzbioru $X\subseteq V$ to $G|_X = (X, \{\{v,w\}: v\in X, w\in X, \{v,w\}\in E\})$, zwany również podgrafem indukowanym (rozszerzenie na grafy ogólne jest oczywiste).

Iloraz grafu prostego G przez relację równoważności $\theta \subseteq V \times V$ na zbiorze jego wierzchołków to graf prosty postaci

$$G/\theta = (V/\theta, \{\{v/\theta, w/\theta\} : \{v, w\} \in E\}), \text{ przy czym } (v, w) \notin \theta.$$

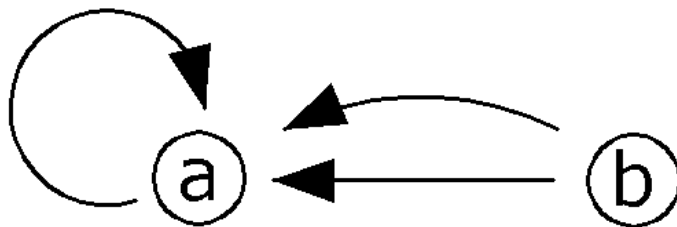
W tym przypadku rozszerzenie na grafy ogólne nie jest trywialne. Można np. mówić o ilorazie grafu prostego, który to iloraz jest grafem ogólnym, w którym krawędź między klasami abstrakcji jest wielokrotna, a jej krotność wynika z liczby krawędzi między elementami tych klas w grafie prostym.

Ściągnięcie zbioru wierzchołków $X \subseteq V$ w grafie prostym $G=(V, E)$ to szczególny przypadek ilorazu G/θ , w którym klasy równoważności wszystkich wierzchołków spoza X są jednoelementowe, a X stanowi dodatkową klasę, tzn. $V/\theta = \{\{v\} : v \in V - X\} \cup \{X\}$. W ten sposób zbiór X został ściągnięty do punktu, którego sąsiadami są sąsiedzi jakiegokolwiek wierzchołka z X . Z drugiej strony, jeśli $\theta \subseteq V \times V$ jest relacją równoważności o klasach $X_1, \dots, X_k$, to ściągając w grafie G kolejno zbiory $X_1, \dots, X_k$ otrzymamy graf ilorazowy G/θ . Ściągnięcie oznaczamy przez $V \searrow X$.

Dopełnienie grafu prostego G o zbiorze wierzchołków V , to graf prosty $\bar{G}$ o tym samym zbiorze wierzchołków i w którym dwa wierzchołki są siednie wtw gdy nie są sąsiednie w grafie G .

Graf skierowany (lub inaczej *digraf*) to para $D = (V, E)$, gdzie V jest zbiorem *wierzchołków*, zaś E jest zbiorem z powtórzeniami *krawędzi skierowanych*, czyli $E \subseteq V \times V$.

Krawędź digrafu przedstawiamy graficznie jako strzałkę ukazującą kierunek uporządkowania elementów w parze.



Graf szkieletowy digrafu D to graf otrzymany z D poprzez zaniedbanie (usunięcie) kierunku krawędzi, ale nie samych krawędzi.

Graf pusty to graf bez krawędzi, zwany często *antykliką*. Antyklikę o n wierzchołkach oznaczać będziemy przez A_n .

Graf pełny to graf, w którym każde dwa wierzchołki połączone są jedną krawędzią. Graf pełny nazywany jest także *kliką* i oznaczany przez K_n , gdzie n jest liczbą jego wierzchołków.

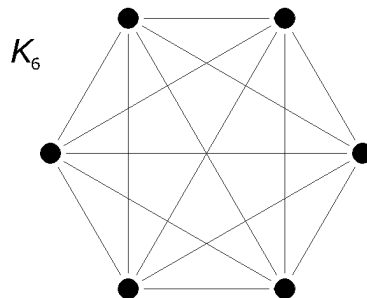
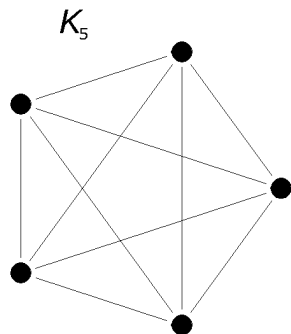
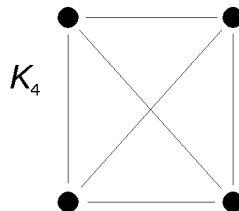
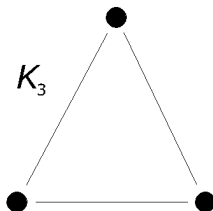
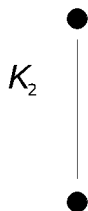
Twierdzenie

Liczba krawędzi w klicy K_n wynosi $\frac{n(n-1)}{2}$.

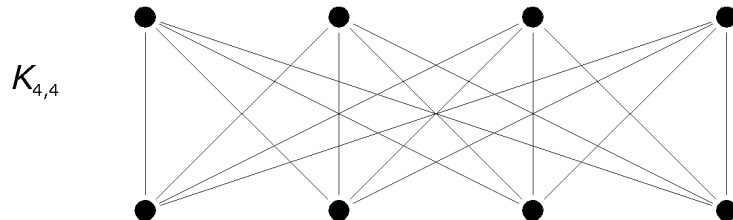
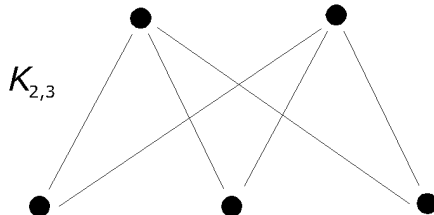
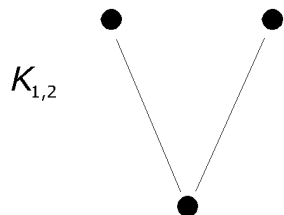
Graf dwudzielny to graf $G = (V, E)$, w którym zbiór V da się podzielić na dwa rozłączne podzbiory V_1 oraz V_2 tak, by żadne dwa wierzchołki w obrębie tego samego podzbioru V_i nie były sąsiadami. Czasem, dla podkreślenia takiego podziału, graf dwudzielny będziemy oznaczać przez $(V_1 \cup V_2, E)$. Zauważmy jednak, że podział taki nie jest jednoznaczny, np. w antyklicie A_n dowolny podział zbioru wierzchołków na dwa podzbiory jest podziałem dwudzielnym.

Pełny graf dwudzielny to graf dwudzielny $G = (V_1 \cup V_2, E)$, w którym każdy wierzchołek z V_1 jest połączony z każdym wierzchołkiem z V_2 . Pełny graf dwudzielny oznaczać będziemy przez $K_{r,s}$, gdzie r jest rozmiarem V_1 , a s rozmiarem V_2 .

Przykłady grafów pełnych



Przykłady pełnych grafów dwudzielnych



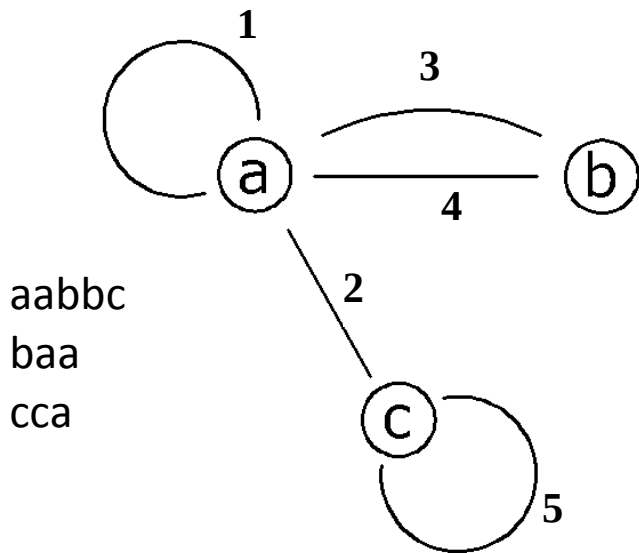
Reprezentacje

Pierwszą wygodną reprezentacją grafu jest **lista list**, czyli lista nazw wierzchołków, gdzie po każdej nazwie wierzchołka występuje lista nazw jego wierzchołków sąsiednich.

Drugą reprezentacją jest **macierz sąsiedztwa**. Dla grafu o n wierzchołkach Jest to macierz $n \times n$, której wyraz o indeksach i, j jest równy liczbie krawędzi łączących wierzchołek i -ty z j -tym.

Trzecią reprezentacją jest **macierz incydencji**. Dla grafu o n wierzchołkach i m krawędziach jest to macierz $n \times m$, której wyraz o indeksach i, j jest równy 1 jeżeli wierzchołek i -ty jest incydenty z krawędzią j -tą, oraz 0 w przeciwnym razie.

W przypadku diagrafów reprezentacje te są odpowiednio modyfikowane.



	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1	2	1
<i>b</i>	2	0	0
<i>c</i>	1	0	0

	1	2	3	4	5
<i>a</i>	1	1	1	1	0
<i>b</i>	0	0	1	1	0
<i>c</i>	0	1	0	0	1

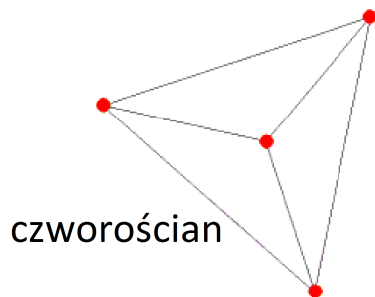
Graf, w którym każdy wierzchołek ma ten sam stopień nazywamy **grafem regularnym**. Jeśli każdy wierzchołek ma stopień r , to graf nazywamy **regularnym stopnia r** .

Graf pusty jest grafem regularnym stopnia 0.

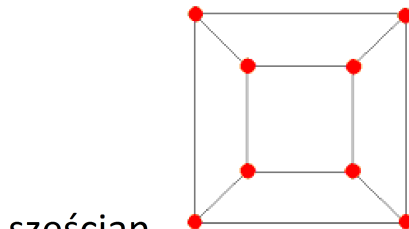
Grafy regularne stopnia 3 nazywamy **grafami kubicznymi**.

Graf pełny jest grafem regularnym stopnia $n-1$.

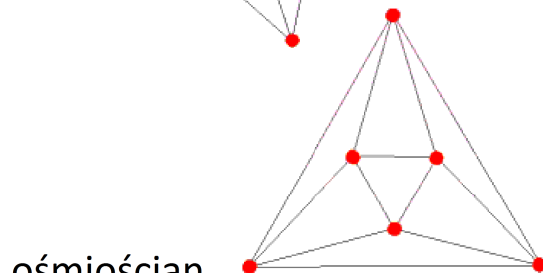
Grafy platońskie to grafy (regularne) utworzone z krawędzi i wierzchołków wielościanów foremnych:



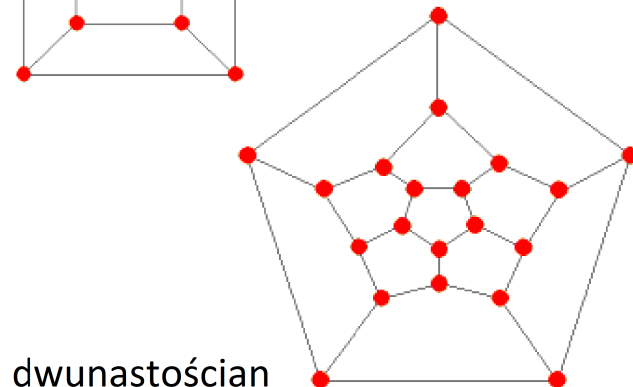
czworościan



sześćcian

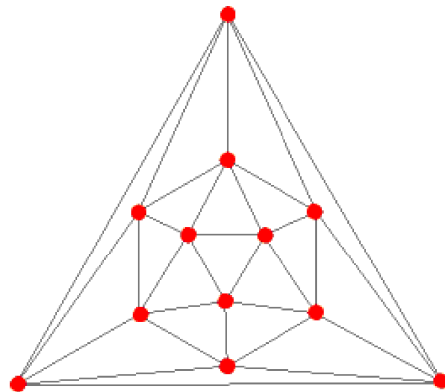


ośmiościan



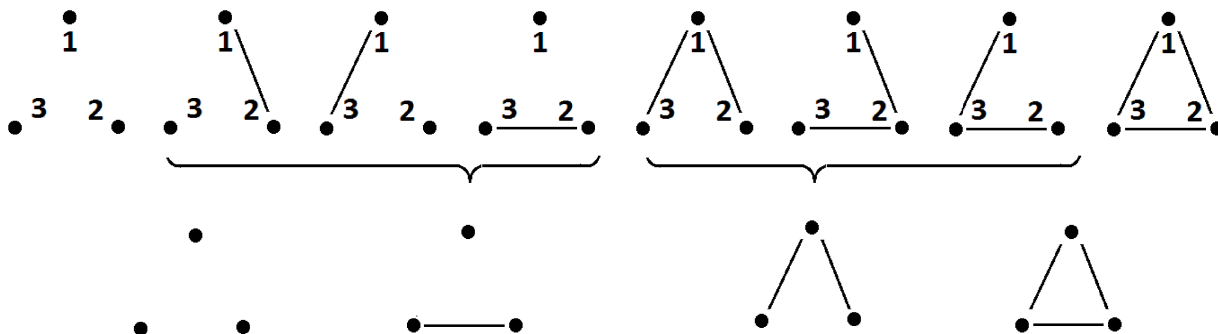
dwunastościan

dwudziestościan



Dwa grafy G_1 , G_2 są **izomorficzne**, gdy istnieje bijekcja z $V(G_1)$ do $V(G_2)$ taka, że liczba krawędzi łączących dane dwa wierzchołki grafu G_1 jest równa liczbie krawędzi łączących ich obrazy w G_2 .

Izomorficzność pozwala na zajmowanie się grafami oznakowanymi bądź nieoznakowanymi. Graf nieoznakowany reprezentuje wszystkie izomorficzne grafy oznakowane, np.:



Marszruta (trasa) w grafie G z wierzchołka w do wierzchołka u to skończony ciąg krawędzi w postaci $wv_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}u$.

W skrócie marszrutę taką oznaczamy przez

$$w \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow u,$$

przy czym strzałki oznaczają tu krawędzie nieskierowane!

Wierzchołek w nazywać będziemy początkowym, a u końcowym wierzchołkiem marszruty. Marszruta zamknięta to marszruta kończąca się w punkcie wyjścia, czyli taka, w której $w = u$. Długość marszruty $w \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow u$ to liczba jej krawędzi.

Uwaga: niektóre wierzchołki, a nawet krawędzie, mogą powtarzać się w marszrucie!

Marszruta może być również zdefiniowana w grafach skierowanych. Definiuje się ją analogicznie, uwzględniając jednak kierunek krawędzi. Marszruta taka, zgodna z kierunkiem krawędzi nazywana jest **marszrutą skierowaną**.

Marszrutę, w której wszystkie krawędzie są różne nazywa się **ścieżką**.

Droga to ścieżka bez powtarzających się wierzchołków, z wyjątkiem pierwszego i ostatniego, które mogą być równe.

Cykl to marszruta zamknięta, w której jedynym powtarzającym się wierzchołkiem jest jej początek (będący oczywiście również jej końcem).

Czasem wygodnie jest traktować marszrutę w grafie G (a więc w szczególności również cykle i ścieżki) jako podgraf

$$M = (V(M), E(M)) := (\{v_0, \dots, v_k\}, \{\{v_0, v_1\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}\}).$$

Graf spójny to graf, w którym między dwoma dowolnymi wierzchołkami istnieje droga. **Graf niespójny** to graf, który nie jest spójny.

Spójna składowa grafu $G = (V, E)$ to maksymalny (w sensie inkluzji) podzbiór $X \subseteq V$, indukujący graf spójny $G|_X$.

Dowolny graf G rozpada się na spójne składowe, tworzące podział zbioru V . Grafy spójne mają jedynie jedną spójną składową, w przeciwieństwie do grafów niespójnych posiadających ich więcej.

Rozkład na spójne składowe wyznacza relację równoważności $\sigma \subseteq V \times V$, dla której graf ilorazowy G/σ jest antykliką.

Wierzchołek izolowany to wierzchołek nie posiadający sąsiadów.

Punkty izolowane tworzą jednoelementowe spójne składowe.

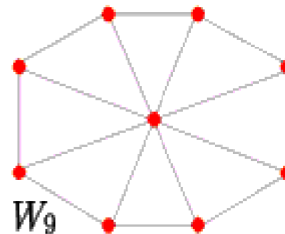
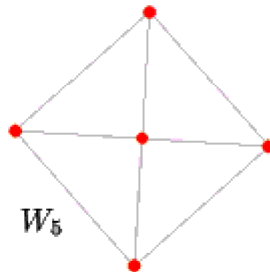
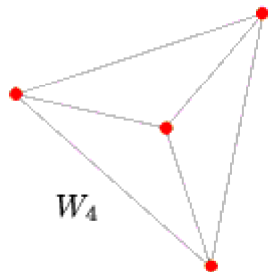
Intuicyjnie wydaje się, że graf spójny powinien mieć dostatecznie dużo krawędzi w stosunku do liczby wierzchołków. Okazuje się jednak, że w grafie spójnym $G = (V, E)$ możemy wymusić jedynie $|V| - 1$ krawędzi. Z drugiej jednak strony, gdy graf G ma więcej niż $|V| \cdot (|V| - 1)/2$ krawędzi, to musi być spójny. Rezultaty te można uzyskać z bardziej ogólnego wyniku:

Twierdzenie

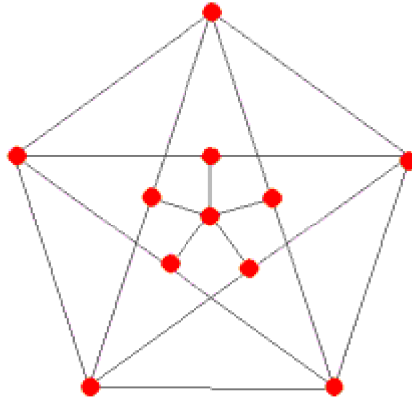
W grafie prostym $G = (V, E)$ o k składowych spójnych liczba jego krawędzi spełnia nierówność $|V| - k \leq |E| \leq \frac{(|V| - k)(|V| - k + 1)}{2}$.

Ponadto, są to najlepsze możliwe ograniczenia, tzn. istnieje graf prosty $G = (V, E)$ o dokładnie k składowych spójnych, w którym $|E| = |V| - k$, a także istnieje graf prosty $G = (V, E)$ o dokładnie k składowych spójnych, w którym $|E| = \frac{(|V| - k)(|V| - k + 1)}{2}$.

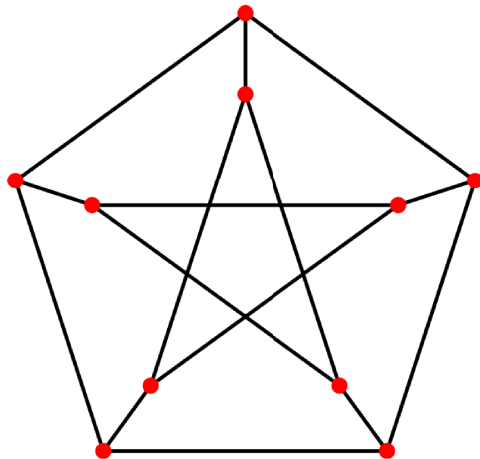
Koła to grafy powstałe przez dodanie do cyklu jeszcze jednego wierzchołka i połączenie tego wierzchołka ze wszystkimi wierzchołkami cyklu. Koło o n wierzchołkach oznaczamy W_n .



Graf Grötztscha



Graf Petersena



Hipergrafy

Hipergraf to para $H = (V, E)$, gdzie V jest dowolnym, niepustym zbiorem wierzchołków; E jest podzbiorem zbioru $P(V) - \emptyset$ wszystkich możliwych niepustych zbiorów, których elementy należą do V . Elementy E nazywamy **hiperkrawędziami**.

Macierz incydencji jest jedną z najpopularniejszych i najwygodniejszych metod reprezentacji hipergrafu. W macierzy incydencji wiersze odpowiadają krawędziom, a kolumny wierzchołkom hipergrafu. Jeśli element macierzy jest równy 1, to i -ta krawędź jest incydentna do j -tego wierzchołka. W przeciwnym przypadku element ten jest równy 0.

Przykładowy hipergraf H_1
zawiera sześć
wierzchołków
 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
oraz trzy hiperkrawędzie:
 $E = \{E_1, E_2, E_3\}$.

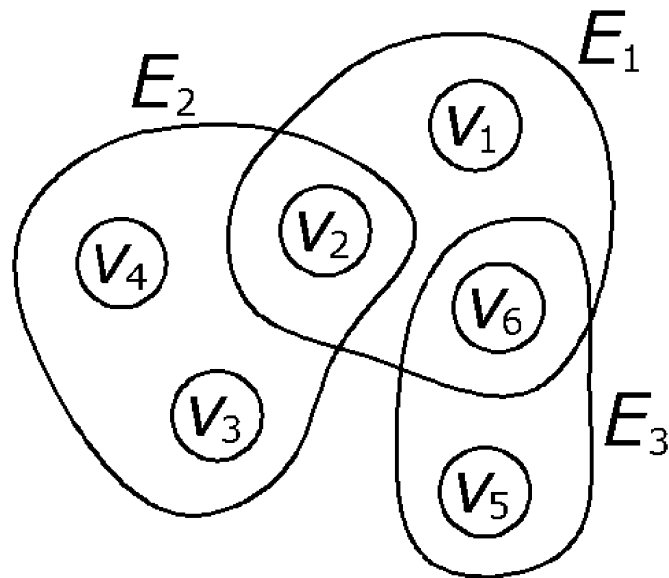
Dwie hiperkrawędzie są
incydentne do trzech
wierzchołków:

$$E_1 = \{v_1, v_2, v_6\},$$

$$E_2 = \{v_2, v_3, v_4\},$$

natomiast trzecia krawędź jest incydentna do dwóch wierzchołków:

$$E_3 = \{v_5, v_6\}.$$



Macierz incydencji dla hipergrafu H_1 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hipergraf dualny

Dla każdego hipergrafu $H = (V, E)$ istnieje hipergraf dualny $H^* = (E, V)$, którego krawędzie odpowiadają wierzchołkom hipergrafu H , natomiast wierzchołki - krawędziom.

Macierz incydencji A^* hipergrafu dualnego H^* jest transponowaną macierzą A hipergrafu H .

Przykładowa macierz A_1^* hipergrafu dualnego do hipergrafu H_1 ze strony poprzedniej.

$$A_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ZADANIA

1. Uzasadnij, że każde dwa grafy mające ten sam ciąg stopni są izomorficzne.
2. Wykaż, że istnieje dokładnie $2^{n(n-1)/2}$ oznakowanych grafów prostych mających n wierzchołków.
3. Ile z nich ma dokładnie m krawędzi?
4. Narysuj graf mający 6 wierzchołków i ciąg stopni (3,3,5,5,5,5).
5. Dlaczego nie istnieje graf prosty mający takie stopnie?
6. Dlaczego nie istnieje graf prosty mający takie stopnie?
7. Graf G ma n wierzchołków i m krawędzi, v jest ustalonym wierzchołkiem stopnia k , e jest ustaloną krawędzią. Ile krawędzi i wierzchołków mają grafy: $G - \{e\}$, $G - \{v\}$, $G \setminus \{e\}$.
8. Podaj przykład grafu (o ile istnieje): regularnego stopnia 4, różnego od K_4 i $K_{4,4}$.
9. Narysuj graf pełny dwudzielny $K_{2,4}$ i jego dopełnienie.

10. Ile krawędzi ma graf K_{10} ?
11. Ile krawędzi ma graf $K_{5,7}$?
12. Ile krawędzi ma koło W_8 ?
13. Narysuj graf prosty o 5 wierzchołkach izomorficzny ze swoim dopełnieniem.
14. Wskaż w grafie Petersena cykle długości 5, 6, 8, 9.
15. Udowodnij, że graf prosty i jego dopełnienie nie mogą być jednocześnie niespójne.

Źródła

Robin J. Wilson: *Wprowadzenie do teorii grafów*. WN PWN Warszawa 2007

Wykłady z matematyki dyskretnej, 12-15, <http://wazniak.mimuw.edu.pl>

K. A. Ross, CH. R. b. Wright: *Matematyka dyskretna*. WN PWN 1999

J. Grygiel: *Wprowadzenie do matematyki dyskretnej*. AOW EXIT 2007

www.mini.pw.edu.pl/MiNIwyklady