Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2017

andrzej.lachwa@uj.edu.pl

Zadania 3

1. Wyznacz NWD liczby 4899 i 6396. Rozłóż te liczby na czynniki pierwsze i wyznacz NWW rozłożony na czynniki (bez wymnażania).

2. Rozłóż liczby 6399 i 4896 na czynniki pierwsze, wyznacz NWD oraz wyznacz NWW rozłożony na czynniki (bez wymnażania).

3. Mamy funkcję z dziedziny NxN w N postaci f(n,k)=min(n,k).
Znajdź $f^{-}(4)$.

4. Pokaż, że 2^{12}-1 nie jest liczbą pierwszą i rozłóż na czynniki (wykorzystaj małe twierdzenie Fermata).

5. Pokaż, że 10201^{17}–10201 jest podzielna przez 17 (wykorzystaj małe twierdzenie Fermata).

6. Co to są liczby doskonałe?

7. Znajdź x, y takie, że ax+by=NWD(a,b), gdzie a=54, b=99.

8. Znajdź x, y takie, że ax+by=NWD(a,b), gdzie a=136 , b=84 .

9. Ile cyfr ma liczba dziesiętna *k*?

10. Udowodnij, że 2^n jest $O(n!)$.

11. Ile wynosi suma wyrazów ciągu Fibonacciego od 5 do 15-tego, czyli 5+8+13+21+34+55+89+144+233+377+610 (proszę tego nie dodawać, tylko użyć wzoru)?

12. Oszacuj s_{20} dla ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie:

$$\begin{cases} s_0=7 \\ s_1=2 \\ s_{n+2}=s_{n+1}+2s_n \quad \text{dla } n\geq 1 \end{cases}$$

13. Znajdź wzór zwarty dla

$$\begin{cases} a_0=0 \\ a_1= -10 \\ a_n= -3a_{n-1}+4a_{n-2} \text{ dla } n>1 \end{cases}$$

14. Znajdź wzór zwarty dla

$$\begin{cases} s_0=2 \\ s_1=5 \\ s_n=5s_{n-1}-6s_{n-2} \text{ dla } n>1 \end{cases}$$

15. Policz Φ^{10} (jako funkcję liniową złotej liczby Φ).

16. Udowodnij, że $5n^4+7n^2-3n-12$ jest $O(n^4)$

17. Co oznacza napis „$5n^6 + \ln(n) + O(n^4) = O(n^6)$” ?

18. Napisz litery greckie: małe - ypsilon, chi, ro, duże - dzeta i eta.

19. Rozwiąż następujące równanie rekurencyjne (postaw hipotezę i udowodnij indukcyjnie):

$$\begin{cases} l_0 = 1 \\ l_n = l_{n-1}+n \text{ dla } n>019. \end{cases}$$

20. Udowodnij, że jeżeli p jest liczbą pierwszą to $(a+1)^p - a^p - 1$ jest podzielna przez p. Dla dowodu rozłóż potęgę sumy na sumę potęg.

21. Dla liczb Fibonacciego $f_{14}=377$ i $f_{15}=610$ oblicz f_{29}.

22. Użyj rozszerzonego algorytmu Euklidesa do wskazania współczynników x, y takich, że $\mathrm{NWD}(120,162)=120x+162y$.

23. Znajdź postać zwartą sumy $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)(i+2)}$.

24. Znajdź postać zwartą sumy $\sum_{i=0}^{n-1} iH_i$.

25. Znajdź postać zwartą sumy $\sum_{i=0}^{n-1} i(i-1)3^i$.

26. Policz: $\Delta^4(4^x)$

27. Policz sumę czwartych potęg kolejnych liczb naturalnych.

28. Przedstaw x^5 jako wielomian dolnych silni.

29. Policz sumę $\Sigma_{i=0\ldots n}\ 3\cdot(-10)^i\cdot i$. (skorzystaj ze wzoru na sumowanie przez części).

30. Policz sumę $\Sigma_{i=0\ldots n}\ (-10)^i\cdot i+3\cdot i^3$ (skorzystaj z liniowości oraz sumowania przez części). Oszacuj wynik.

31. Policz sumę $\Sigma_{i=0\ldots n}\ (i^3+3i^2-4)$ korzystając z rachunku różnicowego.

32. Rozwiąż metodą czynnika sumacyjnego rekurencję

$$\begin{cases} P_0=0 \\ P_n=3P_{n-1}+3^n n^3 \text{ dla } n>1. \end{cases}$$