

Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2016

andrzej.lachwa@uj.edu.pl

Zadania 2

3. Przypomnij zasadę minimum.
4. Udowodnij, że $6 \mid 8^n - 2^n$ dla wszystkich liczb naturalnych.
5. Udowodnij, że $7 \mid 11n - 4n$ dla wszystkich liczb naturalnych.
6. Udowodnij, że $7 \mid 11^n - 4^n$ dla wszystkich liczb naturalnych.
7. Udowodnij, że $n^2 > n+1$ dla wszystkich naturalnych $n > 1$.
8. Udowodnij, że suma sześciątów kolejnych liczb naturalnych to ich kwadrat sumy: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$.
9. Mamy funkcję z dziedziny $N \times N$ w N postaci $f(n,k) = \min(n,k)$.
Znajdź $f^{-1}(4)$.

10. Pokaż, że $2^{12}-1$ nie jest liczbą pierwszą i rozłóż na czynniki (wykorzystaj małe twierdzenie Fermata).
11. Pokaż, że $10201^{17}-10201$ jest podzielna przez 17 (wykorzystaj małe twierdzenie Fermata).
12. Niech A relacja w zbiorze S . Co to znaczy, że $xAAy$, dla $x, y \in S$.
13. Czy suma dwóch relacji równoważności jest równoważnością?
Odpowiedź uzasadnij.
14. Co to jest funkcja charakterystyczna zbioru A w przestrzeni S ?
15. Udowodnij indukcyjnie, że $5 \mid n^5-n$.
16. Udowodnij, że $10 \mid 37^{100}-37^{20}$.
17. Udowodnij, że $10 \mid 37^4-1$.
18. Udowodnij indukcyjnie, że $4+10+16+\dots+(6n-2) = n(3n+1)$.

19. Udowodnij indukcyjnie, że $2 \mid n^2 + 5n + 1$.
20. Udowodnij indukcyjnie, że $8 \mid 5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$.
21. Udowodnij indukcyjnie, że $73 \mid 8^{n+2} + 9^{2n+1}$.
22. Co to są liczby doskonałe?
23. Udowodnij, że jeśli A zwrotna to $A \cap A^{-1}$ jest tolerancją.
24. Co to jest surjekcja?
25. Rozwiąż równanie: $\lfloor (2x-3)/4 \rfloor = (3x-4)/5$.
26. Rozwiąż równanie: $\lfloor (3x-4)/5 \rfloor = (x-2)/3$.
27. Rozwiąż równanie: $\lfloor (3x-4)/5 \rfloor = (2x-1)/3$.

1. Wyznacz NWD liczby 4899 i 6396. Rozłóż te liczby na czynniki pierwsze i wyznacz NWW rozłożony na czynniki (bez wymnażania).

2. Rozłóż liczby 6399 i 4896 na czynniki pierwsze, wyznacz NWD oraz wyznacz NWW rozłożony na czynniki (bez wymnażania).

28. Znajdź x, y takie, że $ax+by=\text{NWD}(a,b)$, gdzie $a=54, b=99$.

30. Znajdź x, y takie, że $ax+by=\text{NWD}(a,b)$, gdzie $a=136, b=84$.

34. Udowodnij, że 2^n jest $O(n!)$.

28. Znajdź x, y takie, że $ax+by=\text{NWD}(a,b)$, gdzie $a=54, b=99$.

35. Przeczytaj litery greckie $\nu \iota \sigma \rho \varepsilon \omega \mu \phi \xi$.

36. Ile wynosi suma wyrazów ciągu Fibonacciego od 5 do 15-tego, czyli $5+8+13+21+34+55+89+144+233+377+610$ (proszę tego nie dodawać, tylko użyć wzoru)?

37. Oszacuj s_{20} dla ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie:

$$\begin{cases} s_0=7 \\ s_1=2 \\ s_{n+2}=s_{n+1}+2s_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

38. Znajdź wzór zwarty dla

$$\begin{cases} a_0=0 \\ a_1=-10 \\ a_n=-3a_{n-1}+4a_{n-2} \text{ dla } n > 1 \end{cases}$$

39. Znajdź wzór zwarty dla

$$\begin{cases} s_0=2 \\ s_1=5 \\ s_n=5s_{n-1}-6s_{n-2} \text{ dla } n > 1 \end{cases}$$

40. Policz Φ^{10} (jako funkcję liniową złotej liczby Φ).
41. Znajdź x, y takie, że $ax+by=\text{NWD}(a,b)$, gdzie $a=54, b=99$.
44. Udowodnij, że $5n^4+7n^2-3n-12$ jest $O(n^4)$
45. Co oznacza napis „ $5n^6 + \ln(n) + O(n^4) = O(n^6)$ ” ?