Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2017
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

9/14

Zasada Dirichleta

1 ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA (1ZSD)

Jeśli n obiektów jest rozmieszczonych w m szufladach i $n > m > 0$,
to istnieje szuflada z przynajmniej dwoma obiektami.

2 ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA (2ZSD)

Jeśli n obiektów jest rozmieszczonych w m szufladach i $n > m > 0$,
to co najmniej jedna szuflada ma $\lceil n/m \rceil$ lub więcej elementów oraz
co najmniej jedna szuflada ma $\lfloor n/m \rfloor$ lub mniej elementów.

Ta postać zasady mówi, że w zbiorze danych wszystkie wartości nie mogą leżeć równocześnie powyżej średniej ani równocześnie poniżej średniej.

Wniosek z 2ZSD

Jeżeli dana jest funkcja f: $X \to Y$, gdzie $|X|=n$, $|Y|=m$, $n > m > 1$ to istnieją y_1, y_2 takie, że $|f^{-1}(y_1)| \geq \lceil n/m \rceil$ oraz $|f^{-1}(y_2)| \leq \lfloor n/m \rfloor$.

Dowód 2ZSD

Zakładam, że każdy z podzbiorów ma mniej niż $\lceil n/m \rceil$ elementów, czyli co najwyżej $\lceil n/m \rceil - 1$ elementów. Wtedy cały zbiór ma ich co najwyżej $m \cdot (\lceil n/m \rceil - 1)$, czyli $n \leq m \cdot (\lceil n/m \rceil - 1)$, czyli $n/m + 1 \leq \lceil n/m \rceil$. Ale to jest sprzeczne z oczywistą własnością, że $x + 1 > \lceil x \rceil$ dla każdego x.

Dowód drugiej części przebiega analogicznie. Proszę go wykonać.

Dowód 1ZSD

Przy $n > m > 0$ wartość $\lceil n/m \rceil$ jest ≥ 2.

3 ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA (3ZSD)

Jeśli n obiektów rozmieszczonych jest w m szufladach i $n>mr$ dla pewnego naturalnego r, to istnieje szuflada z co najmniej $r+1$ obiektami.

Wniosek z 3ZSD

Jeżeli dana jest funkcja $f\colon X \to Y$, gdzie $|X|=n$, $|Y|=m$, oraz $n>mr$, dla pewnego naturalnego r, to co najmniej jeden ze zbiorów $f^{-1}(y)$ ma więcej niż r elementów.

Dowód 3ZSD

Z 2ZSD co najmniej jedna szuflada ma $\lceil n/m \rceil$ lub więcej elementów oraz $n>mr$, dla pewnego naturalnego r. Zatem $\lceil n/m \rceil \geq n/m > r$. Czyli szuflada ta ma co najmniej $r+1$ elementów.

4 ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA (4ZSD)

Niech X_1, X_2, … X_m będą podzbiorami n-elementowego zbioru X oraz niech każdy element z X należy do co najmniej t spośród zbiorów X_i. Wtedy średnia arytmetyczna liczb elementów zbiorów X_i wynosi co najmniej tn/m.

Dowód 4ZSD

Niech P = $\{(x, i): x \in X_i\}$. Zbiór P można rozpisać na dwa sposoby: jako suma zbiorów po i=1…m i jako suma zbiorów po $x \in X$.

P = $\{(x, 1): x \in X_1\} \cup \{(x, 2): x \in X_2\} \cup \ldots \cup \{(x, m): x \in X_m\}$ i wtedy $|P| = \sum_{i=1\ldots m} |X_i|$.

P = $\sum_{x \in X} \{(x, i): x \in X_i\}$ i wtedy $|P| \geq tn$.

Zatem średnia arytmetyczna $(1/m) \cdot \sum_{i=1\ldots m} |X_i| \geq tn/m$.

Przykład

Wybierzmy dowolnie 10 różnych liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ spośród $1, 2, 3, \ldots, 100$. Pokażemy, że w zbiorze $\{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$ można wybrać dwa rozłączne podzbiory, dające tę samą sumę liczb.

Rozwiązanie

Szuflady poetykietujmy liczbami reprezentującymi możliwe sumy liczb w co najwyżej 10-cio elementowych podzbiorach zbioru {1, 2, …100}. Ponieważ największa możliwa taka suma to 91+92+…+100=955, to weźmy 955 szuflad z etykietami: 0, 1, 2, …, 955. Z drugiej strony 10-elementowy zbiór ma 2^{10}=1024 podzbiory, więc z 1ZSD będzie szufladka zawierająca dwa podzbiory (co znaczy, że muszą być dwa różne podzbiory o tej samej sumie).

Jak na razie takie podzbiory nie muszą być rozłączne, ale jeśli z obu z nich usuniemy wspólne liczby, to pozostałe dalej będą dawać takie same sumy, a powstałe zbiory będą już rozłączne.

Przykład

W kwadracie o boku 2 umieścimy 5 punktów. Co najmniej dwa z nich są oddalone o nie więcej niż $\sqrt{2}$.

Rozwiązanie

Dzielimy nasz kwadrat na cztery kwadraty o bokach 1 i przekątnych $\sqrt{2}$. Zgodnie z 1ZSD jeden z tych kwadratów musi zawierać dwa punkty, więc ich odległość nie jest większa od przekątnej kwadratu.

Przykład

Z grupy 21 posłów każdy uczestniczy w co najmniej dwóch komisjach śledczych. Powołano 7 komisji. Jaki nietrywialny wniosek można z tego wyprowadzić?

Rozwiązanie

Z 4ZSD średnia liczebność komisji wynosi co najmniej $2 \cdot 21/7 = 6$.

Przykład

Ile co najwyżej razy można rzucić parą kostek bez otrzymywania dwukrotnie tej samej sumy oczek?

Rozwiązanie

Szuflada oznacza wszystkie wyniki dające tę samą sumę oczek. Takich szuflad będzie od 2 do 12, czyli 11. Tylko ciąg po jednym elemencie z każdej szuflady daje zadany wynik. Dwunasty rzut trafi do jednej z szuflad, które już wystąpiły w ciągu.

Przykład

Wykazać, że jeśli 10 liczb naturalnych daje w sumie 101, to są wśród nich 3 liczby, których suma wynosi co najmniej 31.

Rozwiązanie – I sposób

Ponumerujmy te liczby jako $a_1, a_2, \ldots a_{10}$. Następnie wypiszmy 3 rzędy:

$a_1, a_2, \ldots a_8, a_9, a_{10}$

$a_2, a_3, \ldots a_9, a_{10}, a_1$

$a_3, a_4, \ldots a_{10}, a_1, a_2$

Suma tych 30 liczb wynosi 303. Jedna z 10 kolumn musi mieć sumę równą co najmniej sufit z 303/10 (czyli 31).

Rozwiązanie – II sposób

Podzielmy 10 liczb na 5 par. Jedna z tych par musi mieć sumę co najmniej 21. Oznaczmy ją przez *s*. Z pozostałych 8 liczb jedna musi być równa co najmniej 1/8 ich sumy. Wtedy $s+\frac{1}{8}(101-s) = \frac{7}{8}s + \frac{101}{8} \geq \frac{7}{8}21 + \frac{101}{8} = 31$