

Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2017

andrzej.lachwa@uj.edu.pl

8/14

Zbiory przeliczalne

Przyjmujemy, że $Z_n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ dla $n > 0$ oraz $Z_n = \emptyset$ przy $n=0$.

Zbiór skończony to zbiór bijektywny z pewnym zbiorem postaci Z_n .

Zbiór nieskończony to zbiór, który nie jest skończony.

Liczba elementów skończonego zbioru X to jedyna liczba naturalna n taka, że istnieje bijekcja z Z_n w X . Liczbę tę oznaczamy przez $|X|$.

Oczywiście $|Z_n| = n$.

Zbiór przeliczalny to zbiór skończony lub bijektywny z \mathbb{N} .

Zbiór pusty jest przeliczalny, bo jest skończony. Zbiór liczb parzystych jest przeliczalny, bo $f(x) = 2x$ jest bijekcją $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$. Zbiór liczb całkowitych jest przeliczalny, bo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{dla parzystych } x, \\ -\frac{1-x}{2}, & \text{dla nieparzystych } x, \end{cases}$$

jest bijekcją z \mathbb{N} w \mathbb{Z} .

3 zasady zliczania

Zaczynamy od 3 zasad ogólnych: dodawania, włączania-wyłączania oraz mnożenia.

ZASADA DODAWANIA

Dla skończonych i rozłącznych zbiorów A i B mamy $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Dla zbiorów A_1, \dots, A_n skończonych i parami rozłącznych mamy

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n|.$$

ZASADA WŁĄCZANIA I WYŁĄCZANIA

Dla zbiorów skończonych $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ zachodzi

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_{n-2}| + |A_{n-1}| + |A_n| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-2} \cap A_n| - |A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \dots - |A_{n-3} \cap A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad + \dots \\ &\quad (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

Lemat

W szczególności, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, o ile tylko A, B są skończone.

Przykład

W czasie przyjęcia, na którym było 17 osób, 10 osób poprosiło o kieliszki do wina czerwonego i 10 osób poprosiło o kieliszki do wina białego. Ile osób otrzymało oba kieliszki?

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$17 = 10 + 10 - x \quad \text{a zatem} \quad x = 3.$$

Przykład

W czasie przyjęcia, na którym było 17 osób, 10 osób poprosiło o kieliszki do wina czerwonego, 10 osób poprosiło o kieliszki do wina białego, a 4 osoby o kieliszki do koniaku. Trzy kieliszki stały przy 2 osobach. Ile osób otrzymało dokładnie jeden kieliszek?

Podstawiamy:

$$|C \cup B \cup K| = |C| + |B| + |K| - |C \cap B| - |B \cap K| - |C \cap K| + |C \cap B \cap K|$$

$$17 = 10 + 10 + 4 - |C \cap B| - |B \cap K| - |C \cap K| + 2$$

$$17 = 26 - |C \cap B| - |B \cap K| - |C \cap K|$$

i co dalej ???

Oznaczamy:

x – liczba osób, które mają kieliszki tylko do czerwonego i białego

y – liczba osób, które mają kieliszki tylko do tylko do białego i do koniaku

z – liczba osób, które mają kieliszki tylko do czerwonego i do koniaku

więc

$$17 = 26 - (2+x) - (2+y) - (2+z)$$

$$17 = 20 - (x+y+z) \quad \text{więc} \quad (x+y+z)=3$$

Zatem, skoro 3 osoby mają po dwa kieliszki, a 2 osoby mają po 3 kieliszki, to pozostałe 12 osób ma dokładnie po jednym kieliszku.

Dowód lematu

Ponieważ trzy zbiory $A - B$, $A \cap B$ i $B - A$ są parami rozłączne i sumują się do $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$, to na mocy zasady dodawania mamy:

$$|A \cup B| = |(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)| = |A - B| + |A \cap B| + |B - A|$$

i stąd

$$\begin{aligned} |A \cup B| + |A \cap B| &= |A - B| + |A \cap B| + |B - A| + |A \cap B| \\ &= (|A - B| + |A \cap B|) + (|B - A| + |A \cap B|) \\ &= |(A - B) \cup (A \cap B)| + |(B - A) \cup (A \cap B)| \\ &= |A| + |B| \end{aligned}$$

ZASADA MNOŻENIA

Jeżeli mamy wybrać dwa różne obiekty: pierwszy spośród m obiektów, a drugi spośród n obiektów, to liczba możliwych wyborów jest równa $m \cdot n$.

Zasada ta mówi, że dla skończonych zbiorów X, Y mamy $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.
Przypomnijmy, że iloczyn kartezjański zbiorów X, Y to zbiór $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. A zatem jest to liczba par (x, y) .

Postać ogólna

Jeżeli A_1, A_2, \dots, A_n są zbiorami skończonymi to

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

[Dowód przez indukcję]

Przykład

Rozważmy grupę znajomych, w której mamy 12 kobiet i 15 mężczyzn, i w której każda osoba wysyła osobie płci przeciwnej życzenia imieninowe (osobom tej samej płci nie wysyła życzeń). Ile kartek z życzeniami wysłano w ciągu roku?

Niech C i N będą zbiorami kobiet i mężczyzn. Każda kartka z życzeniami może być interpretowana jako uporządkowana para (c, n) , gdzie $c \in C$, $n \in N$. Zatem liczba wysłanych życzeń to licznosc zbioru $C \times N$ plus licznosc zbioru $N \times C$ więc

$$|C \times N| + |N \times C| = 2 \cdot |C| \cdot |N| = 2 \cdot 12 \cdot 15 = 2 \cdot 180 = 360.$$

Zliczanie podzbiorów

Twierdzenie

Dla dowolnego skończonego zbioru X zachodzi $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

Definicja

Współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ to liczba k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego, tzn. $\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(\mathbb{Z}_n)|$. Podzbiory te nazywamy kombinacjami.

Twierdzenie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Lematy

Dla $n \geq k \geq 0$ zachodzi równość $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Dla $n \geq 1$ zachodzi $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Komentarz

Wyrażenie $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ może być odczytane jako suma podzbiorów 0-elementowych, 1-elementowych, 2-elementowych, ..., $(n-1)$ -elementowych i n -elementowych.

Twierdzenie

Dla $n \geq k \geq 0$ zachodzi równość $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Jak się to ma do trójkąta Pascala?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
.....

Przykład

Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Ile jest możliwych wyników, w których orzeł wypadł parzystą liczbę razy?

Reprezentacja

Niech $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Wynik będziemy reprezentować zbiorem $A \subset X$. Będzie to zbiór pozycji, na których występują jedynki w ciągu opisującym wynik eksperymentu, przy czym 1 – orzeł, 0 – reszka. Na przykład $A = \{1,2,5,6\}$ odpowiada wynikowi 1100110000.

Rozwiązanie

Gdy wypadną same jedyne, to $A = X$.

Gdy wypadnie 8 jedynek, to A jest 8-elementowym podzbiorem X .

Gdy wypadnie 6 jedynek, to A jest 6-elementowym podzbiorem X .

Gdy wypadną 4 jedyne, to A jest 4-elementowym podzbiorem X .

Gdy wypadnie 2 jedyne, to A jest 2-elementowym podzbiorem X .

Gdy wypadnie 0 jedynek, to A jest zbiorem pustym.

Możliwych eksperymentów, gdzie wypadnie parzysta liczba jedynek jest zatem:

$$1 + \binom{10}{8} + \binom{10}{6} + \binom{10}{4} + \binom{10}{2} + 1 = 1 + 45 + 210 + 210 + 45 + 1 = 512$$

A ile jest możliwych wyników? Jest ich oczywiście $2^{10} = 1024$.

Przykład

Ile jest różnych liczb naturalnych mniejszych od 2^n , które w zapisie dwójkowym mają dokładnie k jedynek?

Reprezentacja

Liczby te w zapisie dwójkowym, to ciągi n -elementowe $a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0$, a każdy taki ciąg można traktować jako funkcję charakterystyczną zbioru A zawartego w zbiorze $\{0, 1, \dots, n-1\}$ taką, że $i \in A$ wtw $a_i=1$.

Zbiór A przechowuje informację, na jakich pozycjach znajdują się jedynki. Np. dla $n=7$ liczba $75_{10}=1001101_2$ więc $A=\{6,3,2,0\}$.

Rozwiązanie

Odwzorowanie, które liczbie naturalnej przyporządkowuje zbiór pozycji na których występują jedynki w zapisie dwójkowym tej liczby, czyli odpowiedni zbiór A , jest bijekcją. Liczymy więc k -elementowe podzbiory zbioru $\{0,1,\dots,n-1\}$. Jest ich $\binom{n}{k}$.

Przykład

Ful w pokerze to układ 5 kart, w których występują tylko karty o dwóch różnych wysokościach x i y : dokładnie 3 karty o wysokości x i 2 karty o wysokości y . Oznaczmy typ fula przez (x,y) .

Ile jest różnych układów typu $(7,D)$?

Ile jest różnych typów fuli?

Dla układu typu $(7,D)$ trzy siódemki są wybrane z czterech, a dwie damy – też z czterech.

Więc mamy $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} = 24$ możliwości.

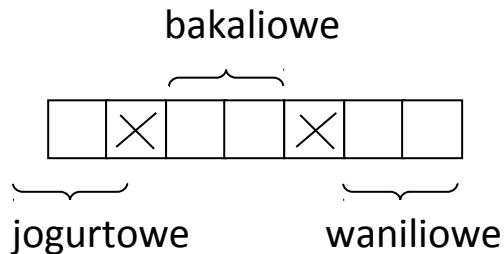
Typ fula ustalimy wybierając jedną z 13 wysokości kart (oznaczymy ją jako x), a następnie jedną z pozostałych 12 (oznaczymy ją jako y), czyli różnych typów fuli jest $13 \cdot 12 = 156$.

Przykład

W lodziarni są trzy rodzaje lodów: jogurtowe, bakaliowe i waniliowe. Sprzedaje się desery po 5 kulek. Na ile sposobów można skomponować deser (kolejność kulek nie jest ważna)?

Mamy liczby naturalne $j \leq 5$, $b \leq 5$, $w \leq 5$, $j+b+w=5$. Każdy taki zestaw można zakodować w 7 kratkach, z których dwie muszą być skreślane. Różnych deserów będzie więc tyle, na ile sposobów można skreślić dwie kratki z siedmiu, czyli tyle, ile różnych podzbiorów dwuelementowych w zbiorze

7-elementowym, czyli $\binom{7}{2} = 21$.



Przykład

Wyobraźmy sobie, że znajdujemy się w mieście zbudowanym na planie prostopadle przecinających się ulic. Znajdujemy się w punkcie A i chcemy dojść – najkrótszą drogą – do punktu B leżącego 3 przecznice na północ i 6 przecznic na wschód. Łatwo zauważyć, że jest wiele najkrótszych dróg prowadzących z A do B. Dla przykładu: możemy pójść 3 razy na północ i potem cały czas na wschód, ale także możemy iść najpierw 6 razy na wschód i dopiero wtedy skrócić na północ.

Ile jest najkrótszych dróg z A do B?

Zauważmy, że każda najkrótsza droga biegnie przez dokładnie 9 skrzyżowań (licząc skrzyżowanie w punkcie A i nie licząc skrzyżowania w punkcie B). Na każdym takim skrzyżowaniu musimy podjąć decyzję, czy pójść na wschód czy na północ, przy czym musimy iść dokładnie 3 razy na północ i dokładnie 6 razy na wschód.

Zatem liczba najkrótszych dróg z A do B to liczba wyborów spośród 9 skrzyżowań, trzech, na których pójdziemy na północ (na pozostałych skrzyżowaniach musimy iść na wschód).

Możemy też jako rozwiązanie policzyć jako liczbę wyborów spośród 9 tych 6 skrzyżowań, na których pójdziemy na wschód (wtedy na pozostałych trzech musimy iść na północ).

Ostatecznie liczba ta wynosi $\binom{9}{3} = \binom{9}{6} = 84$.

Przykład

Ile rozwiązań ma równanie $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$,
gdzie x_i liczbami naturalnymi?

Użyjmy kratki rozważanej w poprzednim przykładzie, ale w ustalonym rozmiarze 4 na 7 kwadratów. Połączmy łamaną lewy dolny róg z prawym górnym w ten sposób, że na każdym skrzyżowaniu można iść na wschód lub na północ. Skrzyżowań, na których mamy dokonać wyboru jest $7+4$. Wybór drogi to wybór skrzyżowań, na których skręcimy na północ. Każda taka droga będzie mieć co najwyżej 5 odcinków poziomych, a suma długości tych odcinków będzie wynosić 7.

Odcinki poziome mogą leżeć na poziomie 0, 1, 2, 3, 4 i 5. Jeśli długości tych odcinków oznaczymy odpowiednio przez x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 , to każda taka droga (łamana) na kratce ustala pewne rozwiązanie naszego

równania, i każde rozwiązanie równania wyznacza dokładnie jedną drogę (łamaną).

Zatem istnieje $\binom{7+4}{4} = 330$ rozwiązań naszego równania.

Przykład

Rozważmy znów kratkę, tym razem o wymiarach 6x6 kwadratów.

Policzmy na ile sposobów można w jej wnętrzu narysować prostokąt?

	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X

Zauważmy, że każdy taki prostokąt jest jednoznacznie wyznaczony przez dwie linie poziome (spośród 7) oraz dwie linie pionowe (znów spośród 7). I na odwrót: dowolny wybór linii pozwoli nam jednoznacznie narysować prostokąt w kratce.

Poziome linie możemy wybrać na $\binom{7}{2}$ sposobów i pionowe linie na tyle samo sposobów. Zatem prostokąt w kratce 6x6 możemy narysować na dokładnie $\binom{7}{2}^2 = 441$ sposobów.

Zliczanie funkcji

Twierdzenie o liczbie funkcji

Zbiór funkcji postaci $X \rightarrow Y$ oznaczamy przez Y^X . Dla skończonych zbiorów X, Y mamy wówczas: $|Y^X| = |Y|^{|X|}$.

Dowód

Niech $|X| = n, |Y| = m$. Zbiór funkcji z X w Y jest równoliczny z Y^n , bo każdą funkcję f można reprezentować jako ciąg $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$.

Na podstawie Zasady Mnożenia otrzymujemy

$$\underbrace{|Y \times Y \times \dots \times Y|}_n = \underbrace{|Y| \cdot |Y| \cdot \dots \cdot |Y|}_n = m^n = |Y|^{|X|}$$

Twierdzenie o liczbie iniekcji

Liczba iniekcji ze zbioru skończonego X (n -elementowego) w zbiór skończony Y (m -elementowy) wynosi (przy $m \geq n$):

$$\frac{|Y|!}{(|Y| - |X|)!} = m! / (m-n)! = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1) = m^n$$

(dolna potęga krocząca)

Twierdzenie o liczbie bijekcji

Liczba bijekcji pomiędzy skończonymi zbiorami X i Y , gdzie $|X| = |Y| = n$ wynosi $n^n = n!$.

Przykład (<http://wazniak.mimuw.edu.pl>)

Trzech kolegów: Bartek, Paweł i Piotrek spotkali się w pubie po zdanym egzaminie. Okazało się, że jest pięć marek piwa do wyboru. Na ile sposobów mogą oni wypić pierwszą kolejkę?

Każdy wybór marki piwa przez 3 osoby możemy interpretować jako funkcję ze zbioru $\{\text{Bartek}, \text{Paweł}, \text{Piotrek}\}$ w pięcioelementowy zbiór marek piwa.

A więc istnieje $5^3 = 125$ sposobów spożycia pierwszej kolejki. I tyleż sposobów dla każdej następnej.

Przykład

Kod PIN jest kodem autoryzującym właściciela karty bankomatowej. Składa się on z 4 cyfr dziesiętnych.

- a) Ile jest różnych kodów PIN?
- b) Ile jest takich PIN-ów, w których żadna cyfra się nie powtarza?
- c) Ile jest takich PIN-ów, w których dokładnie jedna cyfra powtarza się dwukrotnie?

a)

Każdy kod PIN to funkcja z czteroelementowego zbioru pozycji $\{0, 1, 2, 3\}$ w dziesięcioelementowy zbiór cyfr $\{0, 1, \dots, 9\}$. Kodów PIN jest zatem $10^4 = 10000$.

b)

Każdy PIN z niepowtarzającymi się cyframi to iniekcja z 4-elementowego zbioru pozycji $\{0, 1, 2, 3\}$ w 10-elementowy zbiór cyfr $\{0, 1, \dots, 9\}$. Zatem jest ich dokładnie $10^{\underline{4}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

c)

Każdy taki PIN ma 3 różne cyfry . . .

Przykład

Na kurs tańca uczęszcza pięciu chłopaków i pięć dziewcząt. Większość kroków tanecznych ćwiczy się parami. Dla urozmaicenia pary często się zmieniają. Na ile sposobów może być wykonany dobór par do jednego tańca?

Niech C będzie zbiorem chłopaków, a D zbiorem dziewcząt. Wiemy, że $|C|=|D|=5$. Matematycznym modelem doboru par do tańca jest bijekcja z C do D . Zatem możliwych wyborów jest tyle samo co bijekcji pomiędzy 5-elementowymi zbiorami, czyli $5! = 120$.