Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2016
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

7/14

Rachunek różnicowy

Dobrym narzędziem do obliczania skończonych sum jest rachunek różnicowy. W rachunku tym odpowiednikiem operatora pochodnej jest **operator różnicowy** Δ, zdefiniowany dla dowolnej funkcji rzeczywistej *f* jako $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$.

Operator ten będziemy jednak rozważać tylko dla funkcji określonych na zbiorze liczb naturalnych (czyli dla ciągów).

Rozważając funkcję liczb naturalnych *f* nie mamy możliwości badać granicy występującej w definicji pochodnej; w zamian za to rozważamy stosowny iloraz $\frac{f(x+1)-f(x)}{1}$ przy najmniejszej możliwej wartości przyrostu *x*, czyli wartości 1.

Przykłady działania operatora różnicowego

- Dla funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 10$ mamy

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x) = (x+1)^2 - 4(x+1) + 10 - (x^2 - 4x + 10)$$
$$= 2x - 3.$$

- Niech $f(x) = (x!)^2$ dla $x \in N$

$(\Delta f)(x) = \Delta(x!)^2 = [(x+1)!]^2 - (x!)^2 = (x!)^2 \cdot ((x+1)^2 - 1)) = (x!)^2 \cdot (x^2 + 2x)$

- Niech $f(x) = a^x$ dla $x \in N$

$\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = a^x(a-1)$

- Niech $f(x) = x^3$ dla $x \in N$

$\Delta x^3 = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$

Operator Δ^n nazywamy n-tą iteracją operatora różnicowego Δ, gdzie

$$\Delta^0 f = f,$$

$$\Delta^{k+1} f = \Delta(\Delta^k f).$$

Przykład

Dla funkcji $f(x) = \sum_{i=0}^{x} i^2$ mamy:

- $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x) = \sum_{i=0}^{x+1} i^2 - \sum_{i=0}^{x} i^2 = (x+1)^2$,
- $(\Delta^2 f)(x) = (\Delta f)(x+1) - (\Delta f)(x) = (x+2)^2 - (x+1)^2 = 2x+3$,
- $(\Delta^3 f)(x) = (\Delta^2 f)(x+1) - (\Delta^2 f)(x) = 2(x+1)+3 - 2x-3 = 2$,
- $(\Delta^4 f)(x) = (\Delta^3 f)(x+1) - (\Delta^3 f)(x) = 2 - 2 = 0$.

Przykład obliczania wartości różnic dla funkcji $f(x) = \sum_{i=0}^{x} i^2$ dla dwóch wartości dziedziny (dla 0 i dla 1) i dla czterech iteracji:

x	0	1	2	3	4	5	...
$f(x)$	0	1	5	14	30	55	...
$(\Delta f)(x)$	1	4	9	16	25	...	
$(\Delta^2 f)(x)$	3	5	7	9	...		
$(\Delta^3 f)(x)$	2	2	2	...			
$(\Delta^4 f)(x)$	0	0	...				

Twierdzenie

Operator różnicowy Δ jest operatorem liniowym,

tzn.:

$$\Delta(c \cdot f) = c \cdot \Delta f,$$
$$\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g.$$

Przykład

Weźmy wcześniej rozważaną funkcję $f(x) = x^2 - 4x + 10$.

$(\Delta f)(x) = \Delta(x^2 - 4x + 1) = \Delta(x^2) - 4\Delta(x) + \Delta(10) =$

$= (x+1)^2 - x^2 - 4 + 0 = 2x + 1 - 4 = 2x - 3$

Różniczkowanie jednomianów, czyli wielomianów typu x^k, jest bardzo proste: $Dx^k = kx^{k-1}$ dla dowolnego $k \geqslant 1$. Własność ta nie przenosi się jednak na operator Δ:

$$Dx^2 = 2x,$$

$$\Delta x^2 = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1,$$

$$Dx^3 = 3x^2,$$

$$\Delta x^3 = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1,$$

Dla operatora różnicowego Δ odpowiednikiem wielomianu jest *m*-ta dolna silnia *x* (*m*-ta potęga ubywająca, *m*-ta potęga krocząca), czyli wielomian zmiennej *x*, zdefiniowany jako

$$x^{\underline{m}} = x(x-1)\ldots(x-m+1), \quad \text{dla} \quad m \geq 1$$

oraz *m*-ta górna silnia *x* (*m*-ta potęga przybywająca), czyli wielomian zmiennej *x*, zdefiniowany jako

$$x^{\overline{m}} = x(x+1)\ldots(x+m-1), \quad \text{dla} \quad m \geq 1.$$

Dodatkowo przyjmujemy, że $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$.

Zauważmy, że w odróżnieniu od zwykłego potęgowania mamy tu

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}} = (x-n)^{\underline{m}}x^{\underline{n}}.$$

Twierdzenie

Dla $m \geq 1$ zachodzi $\Delta x^{\underline{m}} = m x^{\underline{m-1}}$. Policzmy:

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{m}} &= (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} \\
&= (x+1)x(x-1)\ldots(x-m+2) - x(x-1)\ldots(x-m+1) \\
&= mx(x-1)\ldots(x-m+2) \\
&= mx^{\underline{m-1}}.
\end{aligned}$$

Dla m=0 mamy $\Delta(x^{\underline{0}}) = (x+1)^{\underline{0}} - x^{\underline{0}} = 1 - 1 = 0 = 0 \cdot x^{\underline{-1}}$.

Dla m<0 wyprowadzimy ten wzór później.

Wniosek

$$\Delta \left(\sum_{m=1 \ldots k} a_m x^{\underline{m}}\right) = \sum_{m=1 \ldots k} a_m \Delta x^{\underline{m}} = \sum_{m=1 \ldots k} a_m \cdot m \cdot x^{\underline{m-1}}$$

Przykłady

$\Delta 2^{x} = 2^{x+1} - 2^{x} = 2^{x}(2-1) = 2^{x}$

$f(x)=H_x$ (funkcja harmoniczna)

$\Delta H_x = H_{x+1} - H_x = \sum\limits_{k=1..x+1} ({}^{1}/_{k}) - \sum\limits_{k=1..x} ({}^{1}/_{k}) = {}^{1}/_{(x+1)} = \ldots$

$$x^{\underline{2}} = x(x\text{-}1)$$

$$x^{\underline{1}} = x$$

$$x^{\underline{0}} = 1$$

$$x^{\underline{-1}} = {}^{1}/_{(x+1)}$$

$$x^{\underline{-2}} = {}^{1}/_{(x+1)\cdot(x+2)}$$

$$x^{\underline{-m}} = {}^{1}/_{(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ \ldots\ \cdot(x+m)}$$

$\ldots = x^{\underline{-1}}$.

Twierdzenie o przekształceniu wielomianu

Dowolny wielomian *k*-tego stopnia *p*(*x*) można jednoznacznie przedstawić w postaci $\sum_{i=0..k} a_i x^{\underline{i}}$, gdzie $a_0 = p(0)$, $a_1 = (\Delta p)(0)$, $a_2 = (\Delta^2 p)(0)/2$

i ogólnie

$$p(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(\Delta^i p)(0)}{i!} x^{\underline{i}}.$$

Twierdzenie to jest analogią Twierdzenia Taylora dla wielomianów. Dowód pomijamy w tym wykładzie. Korzysta on z faktu, iż ciąg dolnych silni jest bazą przestrzeni liniowej wielomianów.

Wykorzystując powyższe twierdzenie możemy szybko różnicować dowolny wielomian *p*(*x*) licząc jedynie kolejne różnice $(\Delta^i p)(0)$.

To z kolei dla wielomianu stopnia *k* sprowadza się do policzenia $k+2$ wartości początkowych $p(0), \ldots, p(k+1)$.

Przykład

Aby policzyć $\Delta p(x)$, dla $p(x) = x^3 - 5x + 13$, najpierw wyrażamy nasz wielomian jako kombinację dolnych silni. Do tego potrzebujemy współczynników:

n	0	1	2	3	4	...
$p(n)$	13	9	11	25	57	
$\Delta p(n)$	-4	2	14	32		
$\Delta^2 p(n)$	6	12	18			
$\Delta^3 p(n)$	6	6				
$\Delta^4 p(n)$	0					

Teraz korzystamy z twierdzenia o przekształceniu wielomianu:

$p(n) = n^3 - 5n + 13 = (6/3!)n^{\underline{3}} + (6/2!)n^{\underline{2}} + (-4/1!)n^{\underline{1}} + (13/0!)n^{\underline{0}} =$

$= n^{\underline{3}} + 3n^{\underline{2}} - 4n^{\underline{1}} + 13$

i różnicujemy korzystając z twierdzenia o różnicy potęgi dolnej:

$\Delta p(n) = \Delta(n^{\underline{3}} + 3n^{\underline{2}} - 4n^{\underline{1}} + 13) = 3n^{\underline{2}} + 6n^{\underline{1}} - 4$

Twierdzenie o różnicowaniu iloczynu ciągów

$\Delta(f \cdot g) = f \cdot \Delta g + \nabla g \cdot \Delta f$ gdzie $\nabla g(x) = g(x+1)$ zwana operatorem przesunięcia
Z uwagi na przemienność mnożenia jest również: $\Delta(f \cdot g) = g \cdot \Delta f + \nabla f \cdot \Delta g$.

Przykład

$$\Delta\,(3^x \cdot (x^{\underline{2}}+1)) = (x^{\underline{2}}+1) \cdot \Delta 3^x + 3^{x+1} \cdot \Delta(x^{\underline{2}}+1) =$$
$$= (x^{\underline{2}}+1) \cdot (3^{x+1} - 3^x) + 3^{x+1} \cdot ((x+1)^{\underline{2}}+1 - (x^{\underline{2}}+1)) =$$
$$= (x(x-1)+1) \cdot 3^x \cdot (3-1) + 3 \cdot 3^x \cdot ((x+1)x+1 - (x(x-1)+1)) =$$
$$= 2(x^2-x+1) \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x \cdot (x^2+x+1 - (x^2-x+1)) =$$
$$= 3^x \cdot 2 \cdot (x^2-x+1) + 3^x \cdot 3 \cdot (2x) =$$
$$= 3^x \cdot (2x^2+4x+2)$$

Sumy nieoznaczone i oznaczone

W rachunku różniczkowym operatorem odwrotnym do pochodnej jest całka:

$g = Df$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\int g(x)dx = f(x) + C.$

W rachunku różnicowym operatorem takim jest **suma nieoznaczona**:

$g = \Delta f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum g(x)\delta x = f(x) + C.$

gdzie *C* jest stałą rachunku różnicowego, czyli funkcją taką, że $C(x+1)=C(x)$. W dziedzinie rzeczywistej jest to funkcja okresowa, a w dziedzinie całkowitej jest to funkcja stała.

Tak więc $\sum g(x)\delta x$ jest klasą funkcji których różnica równa jest $g(x)$.

WŁASNOŚCI SUMY NIEOZNACZONEJ

Dla funkcji $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz $c \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$\sum c \cdot g(x)\delta x = c \cdot \sum g(x)\delta x,$$

$$\sum (f(x) + g(x))\delta x = \sum f(x)\delta x + \sum g(x)\delta x,$$

$$\sum x^{\underline{m}}\delta x = \frac{1}{m+1} x^{\underline{m+1}}, \text{ dla } m \geqslant 0.$$

Suma oznaczona funkcji $g(x)$ o parametrach $a, b \in \mathbb{N}$ to

$\sum_{a}^{b} g(x)\delta x = f(b) - f(a)$, dla funkcji f z klasy $\sum g(x)\delta x$,

tzn. takiej, że $g = \Delta f$, czyli $g(x) = f(x+1) - f(x)$.

Zauważmy, ze definicja ta jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru funkcji *f*, jako że stała, o którą dwie takie funkcje się różnią, zniesie się przy odejmowaniu.

Dla dowolnych całkowitych *a*, *b*, *c* zachodzi:

$$\sum_a^a g(x)\delta x = 0,$$

$$\sum_a^{a+1} g(x)\delta x = g(a),$$

$$\sum_a^b g(x)\delta x = -\sum_b^a g(x)\delta x,$$

$$\sum_a^b g(x)\delta x + \sum_b^c g(x)\delta x = \sum_a^c g(x)\delta x,$$

$$\sum_a^b g(x)\delta x = \sum_{a \le i < b} g(i),$$ o ile tylko $a \le b$.

Rachunek różnicowy w liczeniu sum skończonych

Zobaczymy, jak rachunek różnicowy może być pomocny w obliczaniu sum skończonych.

Suma $\sum_{a \le i < b} g(i)$ to dokładnie $f(b) - f(a)$, gdzie f jest sumą nieoznaczoną funkcji g, tzn. $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Dla obliczenia sumy skończonej wystarczy więc wyliczyć sumę nieoznaczoną, a następnie różnicę.

Proces ten jest bardzo podobny do liczenia całek nieoznaczonych.

Przykład 1

Dla policzenia sumy dolnych silni $\sum_{i=0}^{n} i^{\underline{2}}$ odnotujmy najpierw, że skoro $\Delta x^{\underline{3}} = 3x^{\underline{2}}$, to $\sum x^{\underline{2}}\delta x = \frac{x^{\underline{3}}}{3} + C$.

Teraz już oczywiście $\sum_{i=0}^{n} i^{\underline{2}} = \sum_{0}^{n+1} x^{\underline{2}}\delta x = \frac{(n+1)^{\underline{3}}}{3} - \frac{0^{\underline{3}}}{3} = \frac{(n+1)^{\underline{3}}}{3}$.

Przykład 2

Dla policzenia sumy $\sum_{i=0}^{n} i^{\underline{k}}$, gdzie $k \geq 0$, wykorzystujemy fakt, iż $\Delta x^{\underline{k+1}} = (k+1)x^{\underline{k}}$ i dostajemy

$$\sum_{i=0}^{n} i^{\underline{k}} = \sum_{0}^{n+1} x^{\underline{k}} \delta x = \frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}.$$

Przykład 3

Dla policzenia sumy sześcianów $\sum_{i=0}^{n} i^3$ potrzebujemy najpierw znaleźć sumę nieoznaczoną $\sum x^3 \delta x$. W tym celu wykorzystujemy twierdzenie o przekształcaniu wielomianów do przedstawienia wielomianu x^3 jako kombinacji liniowej dolnych silni, dla których znamy już sumy nieoznaczone. Liczymy więc współczynniki typu $\frac{(\Delta^i x^3)(0)}{i!}$:

x	0	1	2	3	4	$\ldots$
x^3	0	1	8	27	64	$\ldots$
Δx^3	1	7	19	37	$\ldots$	
$\Delta^2 x^3$	6	12	18	$\ldots$		
$\Delta^3 x^3$	6	6	$\ldots$			

skąd $x^3 = \frac{6}{3!} x^{\underline{3}} + \frac{6}{2!} x^{\underline{2}} + \frac{1}{1!} x^{\underline{1}} + 0 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$, a zatem

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \sum_{0}^{n+1} x^3 \delta x = \sum_{0}^{n+1} (x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}) \delta x = \frac{(n+1)^{\underline{4}}}{4} + (n+1)^{\underline{3}} + \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2}.$$

Uwalniając się teraz od dolnych silni dostajemy, że to ostatnie wyrażenie

wynosi $\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)+4(n+1)n(n-1)+2(n+1)n}{4} = \dfrac{(n+1)^2 n^2}{4}.$

<u>Rozszerzymy teraz pojęcie dolnej silni</u> na ujemne wykładniki kładąc:

$$x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)},$$ dla $m > 0$.

Prawa dla dolnej silni, które odnotowaliśmy dla wykładników naturalnych są zachowane. W szczególności mamy dla dowolnych $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}},$$

$$\Delta x^{\underline{m}} = m \cdot x^{\underline{m-1}},$$

a zatem

➔ $\sum x^{\underline{m}} \delta x = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1} + C$, dla $m \neq -1$.

Policzmy dla *m* < -1: $\Delta\, x^{\underline{m}} = (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} =$

$= 1 / [(x+2)\cdot(x+3)\ldots(x+1-m)] - 1 / [(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots(x-m)] =$

$= (x+1-x-1+m) / [(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot(x-m+1)] = m\cdot x^{\underline{m-1}}$

Na koniec zajmiemy się przypadkiem, którego nie potrafimy jeszcze sumować, tzn. wyrażeniem $\sum x^{\underline{-1}}\delta x$. Oczywiście $x^{\underline{-1}}$ to $\frac{1}{x+1}$.

Widzieliśmy, że suma postaci $\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}$ to $(n+1)$-sza liczba harmoniczna H_{n+1} oraz że zachowuje się podobnie do logarytmu:

$$\frac{\lfloor \lg n \rfloor + 1}{2} \le H_n \le \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

Z rachunku całkowego wiemy natomiast, że $\int x^{-1}\,dx = \ln x + C$. Następna obserwacja pokazuje, że podobieństwo to nie jest przypadkowe.

$\Delta H_x = x^{\underline{-1}}$ oraz $\sum x^{\underline{-1}} \delta x = H_x + C$.

Mamy

$$\Delta H_x = \Delta\left(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{x}\right) = \left(1 + \ldots + \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x+1}\right) - \left(1 + \ldots + \tfrac{1}{x}\right) = \tfrac{1}{x+1} = x^{\underline{-1}},$$

skąd natychmiast

➔ $\sum x^{\underline{-1}} \delta x = H_x + C$.

Z kolei dyskretnym odpowiednikiem funkcji wykładniczej e^x, która nie zmienia się przy różniczkowaniu, jest funkcja 2^x:

Dla liczby rzeczywistej $c \neq 1$ mamy

$\Delta c^x = (c-1)c^x$ oraz $\sum c^x \delta x = \frac{c^x}{c-1} + C$.

W szczególności $\Delta 2^x = 2^x$ więc

➔ $\sum 2^x \delta x = 2^x + C$.

Przykład 4

Używając rachunku różnicowego policzymy teraz sumę skończonego ciągu geometrycznego $\sum_{i=0..n} a{\cdot}q^i$ z ilorazem $q \neq 1$.

$$\sum aq^x \delta x = a \sum q^x \delta x = a\frac{q^x}{q-1} + C.$$

$$\sum_{i=0}^{n} aq^i = a\frac{q^n}{q-1} - a\frac{q^0}{q-1} = a\frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Sumowanie przez części

Poprzez analogię do rachunku różnicowego zastosujmy operator różnicowy do iloczynu funkcji

$$\begin{aligned}\Delta(f(x)g(x)) &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x)\\ &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x+1) + f(x)g(x+1) - f(x)g(x)\\ &= g(x+1)\Delta f + f(x)\Delta g(x).\end{aligned}$$

Dostajemy stąd natychmiast następującą regułę sumowania przez części

$$\sum f(x)\cdot\Delta g(x)\delta x = f(x)\cdot g(x) - \sum(\Delta f)(x)\cdot g(x+1)\delta x.$$

Przykład 5

Dla policzenia sumy $\sum_{i=0}^{n} i2^i$, wyznaczamy najpierw (przez części) sumę nieoznaczoną $\sum(x2^x)\delta x$. Jest to łatwe, jako że $2^x = \Delta 2^x$, więc

$$
\begin{aligned}
\sum(x2^x)\delta x &= x2^x - \sum((\Delta x)2^{x+1})\delta x \\
&= x2^x - \sum(1 \cdot 2^{x+1})\delta x \\
&= x2^x - 2^{x+1} + C = (x-2)2^x + C.
\end{aligned}
$$

Teraz mamy już

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = \sum_{0}^{n+1} x2^x \delta x = (n+1-2)2^{n+1} - (0-2)2^0 = (n-1)2^{n+1} - 2.$$