Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2016
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

6/14

Sumy

Oto dwie konwencje zapisu **skończonych** sum wyrazów:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

(notacja Sigma, Fourier, 1820)

Czasami stosowana jest ogólniejsza notacja $\sum_{i \in I} a_i$, gdzie I jest skończonym zbiorem indeksów (jeśli jest on pusty to suma ma wartość 0).

Często, zamiast określać zbiór indeksów podaje się pod sumą warunek ten zbiór definiujący (tzw. uogólniona notacja Sigma).

Na przykład: $\displaystyle\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \text{ nieparzysta}}} a_i$, i podobnie dla „notacji iloczynu Π”.

Notacja Iversona

$$\sum_{p(k)} a_k = \sum_{k \geq 0} a_k \, [p(k)]$$

gdzie $a_k [p(k)] = a_k$ gdy $p(k)$ jest prawdziwe, 0 gdy $p(k)$ fałszywe

Przyjmuje się, że $[p(k)]$ jest tzw. *silnym zerem*, tzn. że $a_k [p(k)]$ jest zerem nawet wtedy, gdy pierwszy czynnik nie jest określony.

Przykład

$$\sum_{\substack{k<6 \\ \text{k jest liczba pierwszą}}} 1/k = \sum 1/k \;\; [k<6] \;\; [\text{k jest liczbą pierwszą}] =$$

$$= 0 + 0 + 1/2 \cdot 1 \cdot 1 + 1/3 \cdot 1 \cdot 1 + 1/4 \cdot 1 \cdot 0 + 1/5 \cdot 1 \cdot 1 + \dots$$

PRAWA SUMOWANIA

prawo rozdzielności $$\sum_{p(k)} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{p(k)} a_k$$

prawo łączności $$\sum_{p(k)} (a_k + b_k) = \sum_{p(k)} a_k + \sum_{p(k)} b_k$$

prawo przemienności (σ - permutacja) $$\sum_{p(k)} a_k = \sum_{p(\sigma(k))} a_{\sigma(k)}$$

prawo łączenia zbiorów wskaźników

$$\sum_{p(k)} a_k + \sum_{q(k)} a_k = \sum_{p(k) \vee q(k)} a_k + \sum_{p(k) \wedge q(k)} a_k$$

prawo zmiany porządku sumowania

$$\sum_{p(j,k)} a_{jk} = \sum_{j,k\geq 0} a_{jk}\,[p(j,k)] = \sum_{j\geq 0} \Big(\sum_{k\geq 0} a_{jk} \cdot [p(j,k)] \Big) = \sum_{k\geq 0} \Big(\sum_{j\geq 0} a_{jk} \cdot [p(j,k)] \Big)$$

prawo uogólnione rozdzielności

$$\sum_{p(j,k)} a_j \cdot b_k = \sum_{\substack{p_1(j)\\ p_2(k)}} a_j \cdot b_k = \Big(\sum_{p_1(j)} a_j \Big) \cdot \Big(\sum_{p_2(k)} b_k \Big) \qquad \text{gdy } p(j,k) = p_1(j) \wedge p_2(k)$$

Związki między sumami i rekurencjami

Niech $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$, więc $S_0 = a_0$ oraz $S_n = S_{n\text{-}1} + a_n$ dla $n>0$.

Wartość sumy w postaci zwartej (bez symbolu Σ) możemy policzyć używając metod rozwiązywania rekurencji.

Na odwrót, rozwiązanie rekurencji można uzyskać przez zastąpienie rekurencji odpowiednią sumą i jej policzenie.

Rozwiązywanie rekurencji

Pierwszą metodą rozwiązywania rekurencji było odgadnięcie wzoru zwartego (poprzedzone wyliczeniem kilku kolejnych wyrazów ciągu) i udowodnienie przez indukcję.

Drugą metodą były wzory na tzw. uogólniony ciąg Fibonacciego.

Trzecią metodę poznamy poniżej (nazwiemy ja metodą czynnika sumacyjnego).

Czwartą metodę możemy znaleźć w [*Graham, Knuth, Patashnik*, s. 30]. Nazywamy ją metodą repertuaru.

Przykład (rekurencja dla wieży Hanoi)

$$\begin{cases} T_0 = 0 \\ T_n = 2T_{n-1} + 1 \quad \text{dla } n>0 \end{cases}$$

(wcześniej udowodniliśmy indukcyjnie, że $T_n = 2^n - 1$)

Rekurencję tę możemy przedstawić jako

$$\begin{cases} T_0 / 2^0 = 0 \\ T_n / 2^n = 2T_{n-1} / 2^n + 1/2^n \quad \text{dla } n>0 \end{cases}$$

i przyjmując $S_n = T_n / 2^n$ otrzymamy $\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = S_{n-1} + 2^{-n} \quad \text{dla } n>0 \end{cases}$

czyli $S_n = \sum_{i=1..n} 2^{-i}$ i jako suma ciągu geometrycznego wynosi $1 - ({}^1/_2)^n$

a zatem $T_n = 2^n S_n = 2^n - 1$.

Uogólnienie przykładu

Dla dowolnej rekurencji postaci
$$\begin{cases} T_0 = liczba \\ a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n \quad \text{dla } n>0 \end{cases}$$

mnożymy obie strony przez czynnik sumacyjny s_n taki, aby

$s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}$ i wtedy przy oznaczeniu $S_n = s_n a_n T_n$ otrzymamy

$S_n = S_{n-1} + s_n c_n$ dla $n>0$ i $S_0 = s_0 a_0 T_0 = s_1 b_1 T_0$

Zatem $S_n = s_0 a_0 T_0 + \sum_{i=1..n} s_i c_i = s_1 b_1 T_0 + \sum_{i=1..n} s_i c_i$

a rozwiązaniem rekurencji będzie $\boxed{T_n = (s_1 b_1 T_0 + \sum_{i=1..n} s_i c_i)/(s_n a_n)}$

Czynnik sumacyjny to:

$s_n = a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 / b_n b_{n-1} \ldots b_2$ (wtedy $s_1 = 1$) lub jego wielokrotność.

Na przykład:

$$T_1 = (s_1 b_1 T_0 + s_1 c_1)/(s_1 a_1) = (b_1 T_0 + c_1)/a_1$$

$$T_2 = (s_1 b_1 T_0 + s_1 c_1 + s_2 c_2)/(s_2 a_2) = \ldots$$

wyrażamy s_2 przez s_1

$$s_2 = s_1 a_1/b_2$$

i upraszczamy ułamek przez s_1

$$\ldots = (b_1 T_0 + c_1 + c_2 a_1/b_2)/(a_2 a_1/b_2)\ .$$

$$T_3 = (s_1 b_1 T_0 + s_1 c_1 + s_2 c_2 + s_3 c_3))/(s_3 a_3) = \ \ldots$$

wyrażamy s_2 i s_3 przez s_1

i upraszczamy ułamek przez s_1

Przykład (zad.19/s.83 *Graham, Knuth, Patashnik*)

$$\begin{cases} T_0=5 \\ 2T_n=nT_{n-1}+3n! \end{cases}$$

Czynnik sumacyjny $s_n = a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1 / b_n\, b_{n-1} \ldots b_2 = \underbrace{2\cdot 2\ldots\cdot 2}_{n-1} / n\cdot(n-1)\ldots 3\cdot 2=$
$= 2^{n-1}/n!$ $\quad (s_1 = 2^0/1! = 1,\ s_0 = 1)$

zatem, po pomnożeniu obu stron przez s_n mamy

$(2^{n-1}/n!)\cdot 2T_n = (2^{n-1}/n!)\cdot nT_{n-1}+(2^{n-1}/n!)\cdot 3n!$ czyli

$(2^n/n!)\cdot T_n = (2^{n-1}/(n-1)!)\cdot T_{n-1} + 2^{n-1}\cdot 3$

a po oznaczeniu $S_n = (2^n/n!)\cdot T_n$ mamy $S_n = S_{n-1} + 2^{n-1}\cdot 3$

(uwaga: $S_0 = 1\cdot T_0 = T_0 =5$)

$S_n = S_{n-1} + 2^{n-1}\cdot 3 = S_0 +3+2\cdot 3+4\cdot 3+8\cdot 3+\ldots+ 2^{n-1}\cdot 3 = T_0 +3\cdot(1+2+4+8+\ldots+ 2^{n-1})=$
$=T_0 +3\cdot(2^n-1)=5+3\cdot(2^n-1)$ i na koniec mnożymy przez $n!/2^n$, co daje

$T_n = n!/2^n\cdot(5+3\cdot(2^n-1)) = 5n!/2^n+3n!-3n!/2^n = 3n!+2n!/2^n$ dla $n \geq 0$.

Sprowadzenie sumy do postaci zwartej

Metoda 1. Znajdź wzór w wiarygodnym źródle.

Podręcznik *Grahama, Knutha, Patashnika*, s. 60, wskazuje kilka dobrych źródeł ze wzorami na sumy.

Metoda 2. Odgadnięcie rozwiązania i udowodnienie go przez indukcję

Indukcja sprawdza się, gdy intuicje odnośnie sumy, którą chcemy policzyć, pozwalają nam na wysuwanie hipotez, co do jej wartości. Jest to też dobra metoda sprawdzenia wyników otrzymanych inną metodą lub wyników, których nie jesteśmy pewni (w celu wychwycenia ewentualnych błędów). Powszechnie używane popularne źródła internetowe są raczej mało wiarygodne i stąd wymagają zawsze sprawdzenia.

Metoda 3. Suma jako rekurencja

Przedstaw sumę jako rekurencję i rozwiąż poznanymi metodami.

Metoda 4. Przeindeksowanie sumy

Przykład: rozważmy sumę skończonego ciągu arytmetycznego o parametrach *a*, $b \in \boldsymbol{Z}$:

$$\sum_{0 \le k \le n} (a + kb) = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + \ldots + (a + nb) = \quad ?$$

Zauważmy, że

$$\sum_{0 \le k \le n} (a + kb) = \sum_{0 \le k \le n} (a + (n - k)b) = \sum_{0 \le k \le n} (a + nb - kb).$$

Dodajmy sumę po lewej stronie do sumy po prawej. Wyrażenie z indeksem *k* zniknie, więc możemy wszystko wyciągnąć przed znak sumy. Pamiętajmy o pozostawieniu sumy jedynek!

$$
\begin{aligned}
2\sum_{0\le k\le n}(a+kb) &= \sum_{0\le k\le n}\big((a+kb)+(a+nb-kb)\big)\\
&= \sum_{0\le k\le n}(2a+nb)\\
&= (2a+nb)\sum_{0\le k\le n}1\\
&= (2a+nb)(n+1).
\end{aligned}
$$

Zatem $\sum_{0\le k\le n}(a+kb)=(a+\frac{1}{2}nb)(n+1)$, czyli obliczana suma jest średnią arytmetyczną pierwszego i ostatniego składnika sumy pomnożoną przez liczbę składników sumy.

CIĄG HARMONICZNY

Ciąg harmoniczny $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ jest $O(\lg n)$.

Można pokazać więcej: $\frac{\lfloor \lg n \rfloor + 1}{2} \leq H_n \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1$.

Metoda 5. Zmiana kolejności sumowania w sumach wielokrotnych

Dla przykładu, chcemy policzyć sumę wyrazów ciągu harmonicznego.

Pierwsze takie sumy pokazuje tabela:

n	1	2	3	$\ldots$
H_n	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\ldots$
$\sum_{i=0}^{n} H_i$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{6}$	$\ldots$

Zamienimy kolejność wyrazów w sumie i okazuje się, że nowa postać jest prosta do przeliczenia. Wypiszmy więc wszystkie wyrazy w naszej podwójnej sumie, tak by kolejne wiersze były składnikami liczb harmonicznych:

$$
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & \frac{1}{2} & & & \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \\
\ \ldots & & & & \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{n}
\end{array}
$$

Metoda 6. Zaburzanie

Aby obliczyć sumę skończoną $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$, możemy wypróbować metodę zaburzania. Polega ona na obliczeniu wartości S_{n+1} za pomocą S_n na dwa różne sposoby, na ogół wydzielając pierwszy i ostatni składnik sumy tzn.:

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{i=0}^{n} a_{i+1}.$$

Jeśli uda się ostatnią sumę wyrazić za pomocą S_n, to otrzymamy równanie, którego rozwiązanie jest poszukiwaną sumą. Metody ta jest elegancka i bywa skuteczna. Niestety, nie zawsze działa.

Przykład

Policzmy sumę $\sum_{i=0}^{n} ax^i$ skończonego ciągu geometrycznego dla $a, x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 1$.

Zgodnie z ogólnym schematem zaburzania mamy:

$$\sum_{i=0}^{n} ax^i + ax^{n+1} = ax^0 + \sum_{i=0}^{n} ax^{i+1}$$

$$= a + x\sum_{i=0}^{n} ax^i.$$

Rozwiązując powyższe równanie dostajemy: $\sum_{i=0}^{n} ax^i = \frac{a - ax^{n+1}}{1-x}$, dla $x \neq 1$.

Przykład Suma $\sum_{i=0}^{n} i2^i$ przyjmuje wartości:

n	0	1	2	3	4	$\dots$
$n2^n$	0	2	8	24	64	$\dots$
$\sum_{i=0}^{n} i2^i$	0	2	10	34	98	$\dots$

Licząc przez zaburzanie dostajemy:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i2^i + (n+1)2^{n+1} &= 0\cdot 2^0 + \sum_{i=0}^{n}(i+1)2^{i+1} \\ &= 2\sum_{i=0}^{n} i2^i + 2\sum_{i=0}^{n} 2^i \\ &= 2\sum_{i=0}^{n} i2^i + 2\cdot(2^{n+1}-1),\end{aligned}$$

gdzie suma skończonego ciągu geometrycznego $\sum_{i=0}^{n} 2^i$ została wyliczona w poprzednim przykładzie. Zatem ostatecznie

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = (n+1)2^{n+1} - 2(2^{n+1}-1) = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Przykład

Policzmy jeszcze raz sumę kwadratów $\sum_{i=0}^{n} i^2$, ale tym razem przez zaburzanie.

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 = 0^2 + \sum_{i=0}^{n}(i+1)^2$$
$$= \sum_{i=0}^{n} i^2 + 2\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1$$
$$= \sum_{i=0}^{n} i^2 + 2\sum_{i=0}^{n} i + n$$

Niestety okazuje się, że sumy kwadratów się skracają. Zaburzanie okazało się w tym przypadku nieskuteczne.

Zauważmy jednak, iż z otrzymanej równości $2\sum_{i=0}^{n} i = (n+1)^2 - (n+1)$ dostajemy wzór na sumę kolejnych liczb naturalnych (a nie kwadratów jak chcieliśmy). Nasuwa się podejrzenie, że aby otrzymać wzór na sumę kwadratów trzeba zaburzyć sumę sześcianów. Spróbujmy:

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3 = 0^3 + \sum_{i=0}^{n} (i+1)^3$$

$$= \sum_{i=0}^{n} i^3 + 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1$$

$$= \sum_{i=0}^{n} i^3 + 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Rzeczywiście, sumy sześcianów się skracają i możemy wyprowadzić wzór na sumę kwadratów:

$$3\sum_{i=0}^{n} i^2 = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1) = (n+1)((n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1),$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{(n+1)(n^2+2n+1-\frac{3}{2}n-1)}{3} = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}.$$

Metoda 7. Rachunek różnicowy (***zarys problemu***)

Postać zwartą sumy $\sum_{a\le k<b} g(k)$ możemy policzyć jako $f(b)-f(a)$, jeśli tylko uda się nam znaleźć nieoznaczoną sumę f, taką że $g(x)=f(x+1)-f(x)$.

Np. Szukamy postaci zwartej sumy $\sum_{0\le k<n} (2k^3+1)$.

Jak można wykazać $k^3 = k^{\underline{3}}+3k^{\underline{2}}+k^{\underline{1}}$

przy czym $k^{\underline{3}} = k(k-1)(k-2)$, $k^{\underline{2}} = k(k-1)$, $k^{\underline{1}} = k$.

Mamy $\sum\limits_{0\le k<n}(2k^3+1) = 2\cdot\sum\limits_{0\le k<n} k^{\underline{3}}+3k^{\underline{2}}+k^{\underline{1}} + \sum\limits_{0\le k<n} 1 =$

$$= 2\cdot\Big(\sum_{0\le k<n+1} x^{\underline{3}}\delta x \;+3\cdot\sum_{0\le k<n+1} x^{\underline{2}}\delta x \;+\sum_{0\le k<n+1} x^{\underline{1}}\,\delta x\Big) + n(n+1)/2 = \ldots$$

$$\Delta(x^{\underline{2}}/2) = (x+1)^{\underline{2}}/2 - (x^{\underline{2}}/2) = x^{\underline{1}}$$

$$\Delta(x^{\underline{3}}/3) = (x+1)^{\underline{3}}/3 - (x^{\underline{3}}/3) = x^{\underline{2}}$$

$$\ldots = 2\cdot\Big(x^{\underline{4}}/4\,\Big|_0^{n+1} +3\cdot x^{\underline{3}}/3\,\Big|_0^{n+1} +x^{\underline{2}}/2\,\Big|_0^{n+1}\Big) + n(n+1)/2 =$$

$$= 2\cdot\Big((n+1)^{\underline{4}}/4 + 3\cdot(n+1)/3 + (n+1)^{\underline{2}}/2\Big) + n(n+1)/2 =$$

$$= 2\cdot[((n+1)n(n-1)(n-2) + 4\cdot(n+1)n(n-1) + 2\cdot(n+1)n)/4] + n(n+1)/2 =$$

$$= 2\cdot[n^2(n+1)^2/4] + n(n+1)/2 = n^2(n+1)^2/2 + n(n+1)/2$$

Metoda 8. Funkcje tworzące (***zarys problemu***)

Wzór rekurencyjny na g_n zapisujemy w postaci jednego równania dla wszystkich całkowitych n (możemy użyć czynników Iversona). Np.

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + [n=1]$$ daje ciąg Fibonacciego, bo $g_n=0$ dla $n \leq 0$.

Obie strony mnożymy przez z^n i sumujemy. Po lewej mamy funkcję tworzącą $G(z)$, a prawą przekształcamy, by zawierała $G(z)$. W naszym przykładzie będzie to

$$G(z) = \sum_n g_n z^n = \ldots = z\,G(z) + z^2\,G(z) + z\,.$$

Rozwiązujemy równanie, aby otrzymać postać zwartą $G(z)$. U nas:

$$G(z) = z \,/\, (1 - z - z^2)$$

Rozwijamy $G(z)$ w szereg potęgowy, a współczynnik przy z^n jest szukaną postacią zwartą dla g_n.