Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2017
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

14/14

TWIERDZENIE HALLA

Twierdzenie o kojarzeniu małżeństw rozważa dwie grupy - dziewcząt i chłopców, oraz podgrupy dziewczyn i podgrupy chłopców. Kiedy każdej dziewczynie można przyporządkować jednego kandydata na męża? Okazuje się, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by istniało takie skojarzenie par, jest to, by **każda podgrupa dziewcząt, licząca k osób, znała co najmniej k chłopców**.

Jedną z wersji tego twierdzenia jest wersja dla grafów dwudzielnych, gdzie mężczyzn i kobiety interpretuje się jako zbiory wierzchołków grafu dwudzielnego, a krawędzie łączą "mężczyznę" z "kobietą", jeśli się znają. Por. wykład 13.

Algorytm „znajdowania męża”

Niech A i B będą zbiorami dziewcząt i chłopców, $|A| \leq |B|$.

Niech B_i to zbiór chłopców, których zna dziewczyna a_i. Dopóki jest to możliwe dobieramy kolejnym dziewczynom a_1, a_2, a_3 … a_j chłopców b_1, b_2, b_3 … b_j, przy czym $b_1 \in B_1$ $b_2 \in B_2 \setminus \{b_1\}$, $b_3 \in B_3 \setminus \{b_1, b_2\}$ itd.

Jeżeli uda się to zrobić dla wszystkich dziewczyn, to algorytm znajdowania mężów zakończy się.

Jeżeli jednak dla pewnej dziewczyny a_j zbiór znanych jej chłopców

$$B_j \setminus \{b_1, b_2 \ldots b_{j-1}\}$$

jest już pusty, to trzeba zerwać przynajmniej jedne zaręczyny. W tym celu dziewczyna a_j urządza przyjęcie, na które zaprasza wszystkich znanych jej chłopców (B_j).

Chłopcy ci przychodzą ze swoimi narzeczonymi, ale te – na wszelki wypadek – zabierają ze sobą swoich znajomych chłopców, a ci swoje narzeczone itd, aż do momentu gdy na przyjęcie zostanie zaproszony chłopiec, który nie jest jeszcze zaręczony. Musi się taki znaleźć, bo każda grupa r dziewcząt zna w sumie co najmniej r chłopców, czyli dziewczyny zaproszone na przyjęcie znają w sumie co najmniej tyle samo chłopców, a ponadto dziewczyna a_j nie jest zaręczona.

Ów niezaręczony chłopiec będzie tańczył z dziewczyną, która go zaprosiła, jej narzeczony – z dziewczyną która go zaprosiła, itd. aż na parkiecie znajdzie się chłopiec tańczący z gospodynią przyjęcia. Pary na parkiecie to będą nowe pary narzeczonych, a te, które nie tańczą pozostaną niezmienione.

Po przyjęciu wszystkie dziewczyny a_1, a_2, a_3 … a_j mają narzeczonych i możemy kontynuować dobieranie narzeczonych dla kolejnych dziewczyn.

Jeśli znów dla pewnej dziewczyny a_j zbiór znanych jej chłopców

$B_j \setminus \{b_1, b_2 \dots b_{j-1}\}$, czyli jeszcze nie zaręczonych,

okaże się pusty, to dziewczyna a_j urządzi przyjęcie, na którym, w czasie tańca, zostaną zmienione pary zaręczonych osób tak, by gospodyni przyjęcia zaręczyła się. Itd.

Przykład

Niech A={*a*, *b*, *c*, *d*, *e*}, B={A, B, C, D, E, F, G, H} oraz

- *a* zna A i B
- *b* zna A, B, D
- *c* zna A, B, C
- *d* zna A i C
- *e* zna D, E, F, G, H

Łączymy (*a*, A), (*b*, B), (*c*, C) i dla *d* brakuje narzeczonego. Na przyjęcie *d* zaprasza chłopców A, C, ci swoje narzeczone *a*, *c*, te swoich znajomych A, B, C. Chłopiec B zaprasza narzeczoną *b*, a ona swoich znajomych A, B, D, z których tylko ostatni nie był jeszcze zaproszony (a ponadto nie ma narzeczonej).

Pary na parkiecie: (D, *b*), (B, *c*), (C, *d*). Nie tańczą (A, *a*).

Na koniec dobieramy narzeczonego dla *e*, np. G.

Zbiory z powtórzeniami

Skończony **zbiór z powtórzeniami** $X=<\underbrace{x_1, x_1,\ldots}_{k_1}\ \underbrace{x_2, x_2, \ldots}_{k_2}\ \underbrace{x_3, x_3, \ldots}_{k_3}\ \ldots\ \underbrace{x_n, x_n, \ldots}_{k_n}>$

to rodzina elementów, w której x_1 powtarza się k_1 razy, x_2 powtarza się k_2 razy, itd. aż do x_n które powtarza się k_n razy.

Zbiór taki zapisujemy również w postaci $X = <k_1*x_1, k_2*x_2, k_3*x_3, \ldots k_n*x_n>$, a liczby $k_1, k_2, \ldots k_n$ nazywamy krotnościami. Inny sposób zapisania takiego zbioru to: $X = <\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}, \{(x_1, k_1), (x_2, k_2), \ldots (x_n, k_n)\} >$.

Moc zbioru z powtórzeniami to suma krotności jego elementów.

Podzbiór skończonego zbioru z powtórzeniami $X = \langle k_1 * x_1, k_2 * \mathrm{x}_2, \ldots k_n * x_n \rangle$ może być wyznaczony przez wektor $(m_1, m_2, \ldots m_n)$, gdzie $0 \le m_1 \le k_1$, $0 \le m_2 \le k_2, \ldots 0 \le m_n \le k_n$.

Liczba podzbiorów skończonego zbioru z powtórzeniami o krotnościach $k_1, k_2, \ldots k_n$ jest równa $(k_1+1)(k_2+1) \ldots (k_n+1)$.

Suma dwóch zbiorów z powtórzeniami jest tworzona przez określenie krotności każdego elementu w sumie jako maksimum krotności tego elementu w składnikach sumy. Odpowiednio dla iloczynu będzie to minimum krotności, a dla różnicy – ograniczona (od dołu przez 0) różnica krotności.

Przykład: $\langle a, a, b, c \rangle \cup \langle a, b, b \rangle = \langle a, a, b, b, c \rangle$

W przypadku zbiorów z powtórzeniami można również mówić o „krotnościowej” sumie zbiorów, w której krotność elementu to suma algebraiczna krotności tego elementu w składnikach.

Przykład: $<a, a, b, c>$ □ $<a, b, b> = <a, a, a, b, b, b, c>$

Zadanie

Dwoje urzędników dostało 10 notesów, 16 zeszytów i 14 pisaków. Na ile sposobów mogą podzielić się tymi przedmiotami tak, by nie został żaden przedmiot i aby każdy coś dostał?

Rozwiązanie

Każdy podział odpowiada podzbiorowi zbioru z powtórzeniami. Jeden urzędnik dostaje ten podzbiór, a drugi – pozostałe przedmioty. Sposobów podziału jest zatem tyle, co podzbiorów zbioru z powtórzeniami (zbioru notesów, zeszytów i pisaków): (10+1)(16+1)(14+1)=2805.

Podwójna silnia

Definicje:

$1!! = 1,\ (2n-1)!! = (2n-1)\cdot(2n-3)!!$

$2!! = 2,\ (2n)!! = (2n)\cdot(2n-2)!!$

Przykłady

$5!! = 1\cdot3\cdot5$

$6!! = 2\cdot4\cdot6$

Lemat

$(n-1)!!\cdot(2n)!! = \mathrm{n}!$

Multimiany

Przypomnijmy, że **współczynnik multimianowy** $\binom{n}{k_1, k_2 \ldots, k_r}$, dla $n \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$ oraz całkowitych $k_1, \ldots, k_r$ takich, że $k_1 + \ldots k_r = n$, to liczba sposobów umieszczenia *n* obiektów w *r* pudełkach z odpowiednio k_1 obiektami w pierwszym pudełku, k_2 w drugim, itd. oraz k_r w *r*-tym.

Na przykład mamy 8-cyfrowe liczby, w których występują tylko cyfry 4, 5, 6 i 7. Cyfra 4 występuje tylko na jednej pozycji, natomiast 3-krotnie powtarza się cyfra 5 i 2-krotnie powtarzają się cyfry 6 i 7. Naszymi obiektami będą pozycje 8-cyfrowej liczby. Obiekty te umieścimy w czterech pudełkach oznaczonych 4, 5 , 6 i 7. W pudełku 4 znajdzie się jedna pozycja, w pudełku 5 mają znaleźć się 3 pozycje, w pudełku 6 dwie pozycje i w pudełku 7 dwie pozycje. Jest więc to podział 8 obiektów na cztery pudełka. Podziałów będzie $\binom{8}{1\ 3\ 2\ 2} = \frac{8!}{1!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 4} = 1680.$

Konkurencyjnym dla multimianu pojęciem jest **permutacja z powtórzeniami**.

Definicja

Ciąg składający się z n elementów, wśród których pewne elementy powtarzają się n_1, n_2, … n_r razy, nazywamy n-elementową permutacją z potwórzeniami.

Przykład

Ile można utworzyć 5-elementowych słów z liter a, b, gdzie a powtarza się 3 razy i b powtarza się 2 razy?

bbaaa, abbaa, aabba, aaabb, babaa, ababa, aabab, baaba, abaab, baaab

$$\binom{5}{2\ 3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Kombinacje z powtórzeniami

Definicja

Kombinacją z powtórzeniami z *n* elementów po *k* elementów nazywamy każdy k-elementowy zbiór z powtórzeniami o elementach ze zbioru n-elementowego.

Twierdzenie

Liczba kombinacji z powtórzeniami z *n* elementów po *k* jest równa

$$\binom{n+k-1}{k} .$$

Przykład

Ile jest dwucyfrowych zbiorów z powtórzeniami ?

00 01 02 03 04 05 06 07 08 09

11 12 13 14 15 16 17 18 19

22 23 24 25 26 27 28 29

. . .

88 89

99

$10+9+8+\ldots+1 = \frac{10\cdot 11}{2} = 55$

$\binom{10+2-1}{2} = \binom{11}{2} = 55$

Przykład

Mamy cztery rodzaje owoców: jabłka, gruszki, brzoskwinie i kiwi. Ile różnych paczek po 5 owoców każdej możemy utworzyć?

Są to 5-elementowe zbiory z powtórzeniami o elementach ze zbioru 4-elementowego (bez powtórzeń):

$$\binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = 8 \cdot 7 = 56.$$

Pytania na egzamin licencjacki z zakresu matematyki dyskretnej

- ***Omów metody obliczania sum skończonych***
- ***Liczby Fibonacciego a "złoty podział"; wniosek Keplera***
- ***Twierdzenie Halla i algorytm łączenia w pary***
- ***Trójkąt Stirlinga (dla podziałów) i liczby Bella***
- ***Zasada szufladkowa Dirichleta***

Terminy egzaminów z matematyki dyskretnej

do egzaminu mają prawo przystąpić studenci którzy otrzymali zaliczenie

16 czerwca 2016 (zobacz informację na stronie Zakładu PiGK)
wyniki do 23 czerwca

terminy konsultacji proszę sprawdzać na stronie Zakładu PiGK

egzamin poprawkowy we wrześniu (tylko dla studentów!!!)
informację o terminie proszę sprawdzić na stronie Zakładu PiGK