Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2017

andrzej.lachwa@uj.edu.pl

13b/14

Liczby Stirlinga dla podziałów

Liczba Stirlinga dla cykli $\left[{n \atop k} \right]$ (często nazywana liczbą Stirlinga pierwszego rodzaju) to liczba permutacji zbioru *n*-elementowego złożonych z dokład-nie *k* cykli, czyli takich permutacji $\pi \in S_n$, że $c(\pi) = k$.

W liczbach Stirlinga $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right]$ dla cykli wypełnialiśmy wzorce postaci:

$$\underbrace{(\bullet,\ldots,\bullet)(\bullet,\ldots,\bullet)\ldots(\bullet,\ldots,\bullet)}_{k\ cykli,\ w\ sumie\ o\ n\ miejscach}$$

w sposób injektywny i z dokładnością do:

- kolejności cykli,
- przesunięć cyklicznych w każdym z *k* cykli.

Jeśli zupełnie zaniedbamy kolejność elementów w cyklach, dostaniemy wzorzec: $\underbrace{\{\bullet,\ldots,\bullet\}\{\bullet,\ldots,\bullet\}\ldots\{\bullet,\ldots,\bullet\}}_{k\ zbiorw,\ w\ sumie\ o\ n\ miejscach},$

czyli podział zbioru *n*-elementowego na *k* parami rozłącznych podzbiorów. W podziale, podzbiory takie nazywamy blokami. Przypomnijmy, że podział zbioru *X* na *k* bloków wyznacza relację równoważności na zbiorze *X* o *k* klasach równoważności.

Liczba Stirlinga dla podziałów $\left\{ n \atop k \right\}$ (często nazywana liczbą Stirlinga drugiego rodzaju) to liczba podziałów zbioru *n*-elementowego na dokładnie *k* bloki. Znów przyjmujemy, że $\left\{ 0 \atop 0 \right\} = 1$ oraz $\left\{ n \atop k \right\} = 0$ dla $k < 0$.

Przykład

Lista podziałów $\mathbb{Z}_4$ na dwa bloki:

$\{0,1,2\}\{3\}$ $\{0,1\}\{2,3\}$
$\{0,1,3\}\{2\}$ $\{0,2\}\{1,3\}$
$\{0,2,3\}\{1\}$ $\{0,3\}\{1,2\}$
$\{1,2,3\}\{0\}$

Mamy 7 podziałów zbioru $\mathbb{Z}_4$ na dwa bloki, zatem $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$.

Podział $\mathbb{Z}_4$ na jeden blok jest oczywiście 1.

Podział $\mathbb{Z}_4$ na cztery bloki też jest tylko 1.

Jak się za chwilę okaże podziałów $\mathbb{Z}_4$ na trzy bloki jest $\binom{4}{2} = 6$.

Obserwacje ($n, k \in \mathbb{N}$)

$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \leqslant \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$,

$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$, dla $n > 0$,

$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$, dla $n > 0$,

$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$, dla $n > 0$,

$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$,

$\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$,

$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0$, dla $k > n$.

Dowody

Pierwszy punkt jest oczywisty po zauważeniu, że w liczbach Stirlinga dla podziałów zliczamy te same obiekty co w liczbach Stirlinga dla cykli, ale po zaniedbaniu kolejności elementów.

Drugi punkt to stwierdzenie, że niepusty zbiór nie może zostać podzielony na zero bloków.

Trzeci punkt orzeka, że jest tylko jeden podział niepustego zbioru na jeden blok - blok ten musi być całym dzielonym zbiorem.

Dla dowodu czwartego załóżmy, że $|X| = n$ i niech $x \in X$. Zauważmy, że podział na dwa bloki jest zdeterminowany jednym z tych bloków - drugi to po prostu dopełnienie pierwszego. Niech więc blokiem determinującym podział, będzie blok zawierający *x*. Element *x* może stanowić blok z dowolnym podzbiorem pozostałego $(n-1)$-elementowego zbioru $X - \{x\}$

poza podzbiorem pełnym, gdyż wtedy drugi blok byłby pusty. Zatem jest dokładnie $2^{n-1}-1$ możliwości wyboru bloku dla *x*, i tym samym tyleż jest podziałów X.

Piąty punkt mówi o podziale zbioru *n*-elementowego na *n*-1 bloków. Zatem jeden z tych bloków musi być 2-elementowy. Po wybraniu takiego bloku pozostałe bloki będą jednoelementowe. Podziałów jest zatem tyle na ile sposobów można wybrać 2-elementowy podzbiór zbioru *n*-elementowego.

Dowody pozostałych dwóch własności są oczywiste.

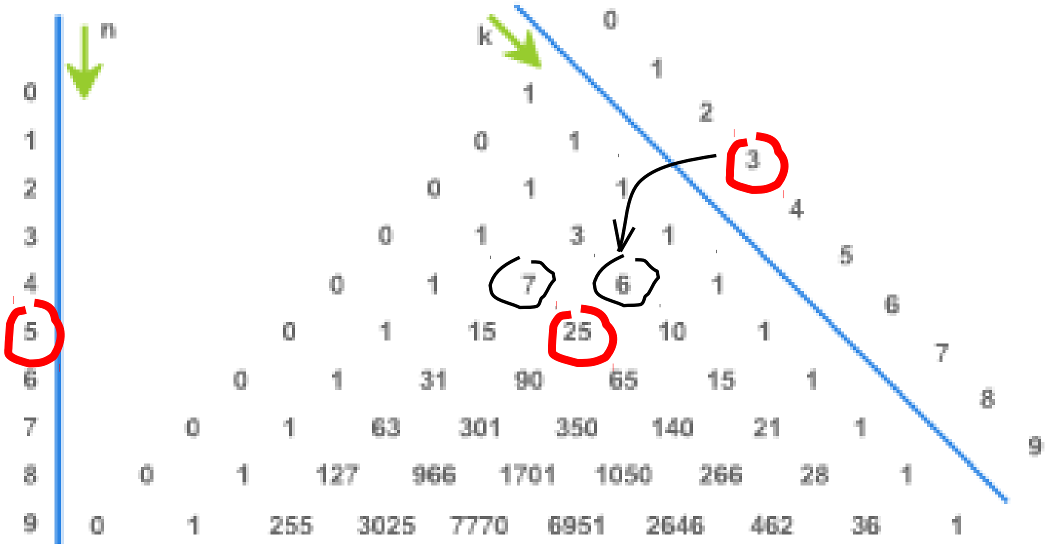
Liczby Stirlinga dla podziałów, podobnie jak współczynniki dwumianowe, czy liczby Stirlinga dla cykli można generować używając zależności rekurencyjnej. Na jej podstawie można zbudować trójkąt Stirlinga dla podziałów.

Obserwacja (wzór trójkątny)

$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$. dla wszystkich k: $0<k\leq n$.

Obserwacja ta pozwala na szybką konstrukcję **trójkąta Stirlinga dla podziałów**.

Trójkąt Stirlinga dla podziałów



Kilka wykładów wcześniej wskazaliśmy liczbę funkcji, liczbę injekcji i liczbę bijekcji między zbiorami skończonymi. Przemilczeliśmy liczbę surjekcji, nie mając jeszcze wtedy wystarczających narzędzi do ich zliczenia. Zauważmy jednak, że każda surjekcja $X \longrightarrow Y$ wyznacza podział zbioru *X* na $|Y|$ bloków. Nie dziwi więc następujący związek z liczbami Stirlinga dla podziałów.

Obserwacja

Dla skończonych zbiorów *X*, *Y* liczba surjekcji $X \longrightarrow Y$ wynosi
$|Y|! \cdot \left\{ \begin{matrix} |X| \\ |Y| \end{matrix} \right\}$.

Dowód

Niech $Y = \{y_0, \ldots, y_{m-1}\}$. Jak już zauważyliśmy, surjekcja postaci $f : X \longrightarrow Y$ wyznacza pewien podział zbioru X dodatkowo poetykietowany elementami zbioru X na $m = |Y|$ bloków $f^{-1}(\{y_0\}), \ldots, f^{-1}(\{y_{m-1}\})$.

Nieetykietowanych podziałów jest oczywiście $\left\{ \begin{matrix} |X| \\ |Y| \end{matrix} \right\}$. Ponieważ każdy podział może być poetykietowany na $|Y|!$ sposobów, możemy zakończyć dowód.

Obserwacja ($n, k \in \mathbb{N}$)

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{0<i_0<\ldots<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k-2}} \cdots \binom{i_1}{i_0}.$$

Dowód

Niech $|X| = n$. Pojedynczy składnik $\binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k-2}} \cdots \binom{i_1}{i_0}$ rozważanej sumy to liczba wyborów ciągu zbiorów $X \supsetneq A_{k-1} \supsetneq \ldots \supsetneq A_1 \supsetneq A_0$, odpowiednio $i_{k-1} > \ldots > i_1 > i_0$ elementowych.

Rzeczywiście $A_{i_{k-1}} \subsetneq X$ możemy wybrać na $\binom{n}{i_{k-1}}$ sposobów, $A_{i_k-2} \subsetneq A_{i_k-1}$ na $\binom{i_{k-1}}{i_{k-2}}$ sposobów itd. Każdy taki ciąg zbiorów odpowiada jednoznacznie ciągowi $k+1$ bloków $\langle B_0, \ldots, B_k \rangle$, gdzie $B_0 = A_0, B_1 = A_1 - A_0, \ldots, B_{k-1} = A_{k-1} - A_{k-2}, B_k = X - A_{k-1}$.

W podziale nie jest jednak istotne uporządkowanie bloków $B_0, \ldots, B_k$, co oznacza, że powinniśmy przejść od ciągu $\langle B_0, \ldots, B_k \rangle$ do rodziny bloków $\{B_0, \ldots, B_k\}$, wydzielając tym samym każdy składnik sumy przez $(k+1)!$. Tak wydzielona suma to nic innego jak liczba podziałów zbioru *n*-elementowego na $k+1$ bloków, czyli $\left\{ {n \atop k+1} \right\}$.

Przykład

$$\begin{aligned}\left\{ {n \atop 3} \right\} &= \frac{1}{3!} \sum_{0<j<i<n} \binom{n}{i}\binom{i}{j} = \frac{1}{6} \sum_{0<i<n} \binom{n}{i} \sum_{0<j<i} \binom{i}{j} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{0<i<n} \binom{n}{i}(2^i - 2) = \frac{1}{6} \sum_{0<i<n} \binom{n}{i} 2^i - \frac{1}{3} \sum_{0<i<n} \binom{n}{i} \\ &= \frac{1}{6}(3^n - 1 - 2^n) - \frac{1}{3}(2^n - 2) = \frac{3^{n-1}+1}{2} - 2^{n-1}\end{aligned}$$

Tw. Wzór na obliczanie liczb Stirlinga dla podziałów

Dla n>0 liczba $\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{n-k} \leqslant k} i_1 i_2 \ldots i_{n-k}$ dla wszystkich *k*<*n.*

Dowód analogiczny, jak dla liczb Stirlinga dla cykli.

Przykład

$$\left\{ {5 \atop 3} \right\} = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant 3} i_1 i_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 25.$$

Liczby Bella

W trójkącie Pascala *n*-ty wiersz sumuje się do liczby podzbiorów zbioru *n*-elementowego, czyli do 2^n. W trójkącie Stirlinga dla cykli *n*-ty wiersz sumuje się do liczby permutacji zbioru *n*-elementowego, czyli do *n*!. Zajmiemy się teraz sumą *n*-tego wiersza trójkąta Stirlinga dla podziałów. Oczywiście suma taka to liczba wszystkich podziałów zbioru *n*-elemento-wego, lub inaczej liczby wszystkich relacji równoważności na zbiorze *n*-elementowym.

Liczba Bella B_n to liczba podziałów zbioru *n*-elementowego, czyli

$$B_n = \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\}.$$

Lista kilku pierwszych liczb Bella:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\ldots$
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	$\ldots$

Obserwacja

Liczby Bella spełniają następującą zależność rekurencyjną:

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i.$$

Dowód

Wybierzmy i ustalmy w $(n+1)$-elementowym zbiorze X pewien element $x \in X$. Policzmy teraz ile jest podziałów zbioru X takich, że blok zawierający *x* ma dokładnie *i*+1 elementów. Oczywiście pozostałe *i* elementów tego bloku może zostać wybranych ze zbioru $X - x$ na $\binom{n}{i}$ sposobów. Każdy taki blok możemy rozbudować do podziału zbioru X poprzez podzielenie pozostałych $n-i$ na bloki. Podział taki jest oczywiście możliwy na B_{n-i} sposobów, skąd sumując po wszystkich możliwych wartościach i otrzymujemy

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i.$$

Przykład

Podzielmy zbiór 5-elementowy {a,b,c,d,e} na dokładnie 2 bloki, np. {a,c,d,e} i {b}. Podziałów takich jest 15.

Podziałów na dokładnie 3 bloki jest 25. Należy do nich np. podział {a,b}, {c,d}, {e}.

Podziałów na dokładnie 4 bloki jest 10. Np. {a}, {b}, {c,d}, {e}.

W sumie, dodając jeszcze jeden podział na 1 blok i 1 podział na 5 bloków, mamy liczbę wszystkich możliwych podziałów, czyli liczbę Bella B_5=52.

Bazy przestrzeni wielomianów

Przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}[x]$ wszystkich wielomianów jednej zmiennej rzeczywistej x ma naturalną bazę złożoną z jednomianów $1, x, x^2, x^3, \ldots$

W różnicowym odpowiedniku twierdzenia Taylora zobaczyliśmy, że każdy wielomian $p(x)$ można przedstawić jako kombinację liniową

$$p(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(\Delta^i p)(0)}{i!} x^{\underline{i}}$$

dolnych potęg $x^{\underline{i}}$.

Interesujące jest, że bazami dla przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]$ mogą być także górne potęgi $1, x^{\overline{1}}, x^{\overline{2}}, x^{\overline{3}}, \ldots$, natomiast współczynniki przejścia między tymi trzema bazami są ściśle powiązane z liczbami Stirlinga.

W poniższych twierdzeniach rezygnujemy z ograniczeń na indeksy sumowania. Zakładamy jedynie, że przebiegają one liczby całkowite pamiętając, że $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ i $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ zerują się dla $k < 0$ oraz $k > n$.

Twierdzenie 1

Dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $$x^{\overline{n}} = \sum_i \left[\begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right] x^i.$$

Twierdzenie 2

Dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $$x^n = \sum_i \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} x^{\underline{i}}.$$