Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2017
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

13a/14

Podziały i liczby Stirlinga

Liczba Stirlinga dla cykli $\left[n \atop k \right]$ (często nazywana liczbą Stirlinga pierwszego rodzaju) to liczba permutacji zbioru *n*-elementowego złożonych z dokładnie *k* cykli, czyli takich permutacji $\pi \in S_n$, że $c(\pi) = k$.

Przyjmujemy, że $\left[0 \atop 0 \right] = 1$, a więc że jest jedna permutacja zbioru pustego bez cykli (funkcja pusta).

Z powodów technicznych, w przekształceniach rachunkowych wygodnie jest mieć zdefiniowaną wartość $\left[n \atop k \right]$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}$, więc przyjmujemy, że $\left[n \atop k \right] = 0$ dla $k < 0$.

Przykład

Lista permutacji $\mathbb{Z}_4$ złożonych z 2 cykli:

$$
\begin{array}{lll}
(0,1,2)(3) & (0,2,3)(1) & (0,1)(2,3) \\
(0,2,1)(3) & (0,3,2)(1) & (0,2)(1,3) \\
(0,1,3)(2) & (1,2,3)(0) & (0,3)(1,2) \\
(0,3,1)(2) & (1,3,2)(0) &
\end{array}
$$

Mamy 11 permutacji $\mathbb{Z}_4$ złożonych z dwóch cykli, zatem $\left[\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right] = 11$.

Obserwacje ($n \in \mathbb{N}$)

$\left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right] = 0$, dla $n > 0$

$\left[\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = (n-1)!$,

$\left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right] = \binom{n}{2}$,

$\left[\begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right] = 1$,

$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = 0$, dla $k > n$

Dowody

Pierwszy punkt jest natychmiastową konsekwencją faktu, że nie można podzielić niepustego zbioru na 0 części (cykli).

Liczba $\left[\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right]$ opisuje permutacje o jednym cyklu. Każda taka permutacja jest zadana wzorcem $\underbrace{(\bullet, \ldots, \bullet)}_{n \text{ pozycji}}$. Wzorzec taki może być wypełniony *n*-elementami na *n*! sposobów. Ale ten sam cykl ma wiele opisów różniących się jedynie przesunięciem. Zatem każdy *n*-elementowy cykl może być zapisany według takiego wzorca na *n* sposobów, czyli liczba cykli na zbiorze *n*-elementowym to $\frac{n!}{n} = (n-1)!$, co dowodzi punktu drugiego.

Liczba $\left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right]$ opisuje permutacje o *n*-1 cyklach. Permutacja taka musi więc być typu $[1^{n-2} 2^1]$, czyli jest transpozycją.

Każda transpozycja jest jednoznacznie wyznaczona przez dwuelementowy zbiór elementów, które ze sobą zamienia. Zatem transpozycji jest dokładnie tyle co podzbiorów 2-elementowych, czyli $\binom{n}{2}$, co dowodzi punktu trzeciego.

Dla dowodu punktu czwartego zauważmy, że jedyną permutacją o *n* cyklach na zbiorze *n*-elementowym jest identyczność.

Równie łatwo jest stwierdzić, że zbiór *n*-elementowy nie może być podzielony na więcej niż *n* niepustych części (mających stanowić cykle).

Liczby Stirlinga dla cykli, podobnie jak współczynniki dwumianowe, można generować używając zależności rekurencyjnej. Na jej podstawie można zbudować **trójkąt Stirlinga dla cykli**.

Obserwacja (wzór trójkąta)

Dla $0 < k \leqslant n$ mamy $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = (n-1)\left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right].$

Dowód

Niech *x* będzie wyróżnionym i ustalonym elementem *n*-elementowego zbioru *X*. Permutacje zbioru *X* o *k* cyklach można podzielić na dwa typy, w których:

- ✓ *x* stanowi jednoelementowy cykl,
- ✓ *x* jest w cyklu co najmniej 2-elementowym.

W pierwszym przypadku pozostałe $n-1$ elementów zbioru X muszą uformować $k-1$ cykli, co jest możliwe na $\left[{n-1 \atop k-1} \right]$ sposobów. W drugim przypadku, po usunięciu elementu x permutacje badanego typu wciąż będą mieć k cykli. Jest ich zatem tyle, co permutacji n-1-elementowego zbioru o k cyklach, czyli $\left[{n-1 \atop k} \right]$.

Element x może rozbudować każdą permutację zbioru $X-\{x\}$ na $n-1$ sposobów (wchodząc do cyklu jako następnik jednego z $n-1$ elementów).

Zatem permutacji drugiego typu jest dokładnie $(n-1)\left[{n-1 \atop k} \right]$.

W trójkącie Stirlinga dla cykli, *n*-ty wiersz zawiera liczby permutacji zbioru *n*-elementowego o kolejno $0, 1, \ldots, n$ cyklach. Zatem suma wszystkich tych wartości to liczba wszystkich permutacji zbioru *n*-elementowego, czyli *n*!. Dostajemy stąd natychmiast:

Obserwacja

Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left[\begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right] = n!$

Trójkąt Stirlinga dla cykli

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	Σ
0	1								1
1	0	1							1
2	0	1	1						2
3	0	2	3	1					6
4	0	6	11	6	1				24
5	0	24	50	35	10	1			120
6	0	120	274	225	85	15	1		720
7	0	720	1764	1629	735	175	21	1	5040

Ciekawy jest następujący związek liczb Stirlinga dla cykli z liczbami harmonicznymi H_n.

Obserwacja

Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $\sum_{i=0}^{n} i \left[\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right] = n! H_n.$

Dowód

Dla *n*=0 tożsamość jest oczywista, a dla *n*>0 przybiera postać

$$\sum_{i=1}^{n} i \left[\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right] = n! H_n$$

Pokażemy że obydwie liczby z naszej obserwacji to sumaryczna liczba cykli we wszystkich permutacjach zbioru *n*-elementowego, tzn. $\sum_{\sigma \in S_n} c(\sigma)$.

1)

Permutacji o *i* cyklach jest dokładnie $\left[\begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]$. W sumie permutacje o *i* cyklach mają więc $i \cdot \left[\begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]$ cykli, czyli $\sum_{\sigma \in S_n} c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} i \left[\begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]$.

2)

Zliczymy najpierw i-elementowe cykle zbudowane z elementów zbioru *n*-elementowego. Każdy taki cykl jest wyznaczony przez wypełnienie wzorca $\underbrace{(\bullet, \ldots, \bullet)}_{i \ pozycji}$, ale z dokładnością do przesunięcia. Wypełnień jest oczywiście tyle, ile injekcji postaci $\mathbb{Z}_i \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, czyli $n \cdot (n-1 \cdot \ldots \cdot (n-i+1)) = n^{\underline{i}}$.

Zatem zliczanych cykli i-elementowych jest dokładnie $\frac{n^{\underline{i}}}{i}$.

Każdy cykl *i*-elementowy występuje w dokładnie *n*– *i* permutacjach zbioru *n*-elementowego, gdyż tyle jest permutacji pozostałych *n*– *i* elementów. Zatem sumaryczna liczba cykli we wszystkich permutacjach zbioru *n*-ele-mentowego wynosi:

$$\sum_{\sigma \in S_n} c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n^{\underline{i}}}{i}(n-i)! = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i} = n!H_n.$$

Tw. Wzór na obliczanie liczb Stirlinga

Dla n>0 liczba $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{0<i_1<i_2<\ldots<i_{n-k}<n} i_1 i_2 \ldots i_{n-k}$ dla wszystkich $k<n$.

Dowód indukcyjny

1') dla n=1 i k=0 pod sigmą nie będzie żadnego iloczynu, bo nie może być $0<i_1<1$, więc suma 0

1”) dla n=2 i k=0 pod sigmą nie będzie żadnego iloczynu, bo nie może być $0<i_1<i_2<2$, więc suma 0

dla dla n=2 i k=1 suma skończona składa się z jednego składnika i wynosi $i_1=1$

2) Zakładam, że wzór prawdziwy dla dowolnie ustalonego n.

Sumę $\sum_{0<i_1<i_2<\ldots<i_{n-k}<i_{n+1-k}<n+1} i_1 i_2 \ldots i_{n-k} i_{n+1-k}$ można rozłożyć na dwie sumy:

pierwszą w której $i_{n+1-k}=n$ i drugą, gdzie $i_{n+1-k}<n$.

W pierwszej można n wyciągnąć przed sigmę, więc na podstawie założenia mamy

$$n\cdot \sum_{0<i_1<i_2<\ldots<i_{n-k}<n} i_1 i_2 \ldots i_{n-k} = n\cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} .$$

W drugiej $i_{n+1-k}<n$ więc można ją zapisać jako

$$\sum_{0<i_1<i_2<\ldots<i_{n-k}<i_{n+1-k}<n} i_1 i_2 \ldots i_{n-k} i_{n+1-k} = \sum_{0<i_1<i_2<\ldots<i_{n-k}<i_{n-(k-1)}<n} i_1 i_2 \ldots i_{n-k} i_{n-(k-1)}$$ i na podstawie założenia jest to $\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$.

Otrzymany wynik, na podstawie wzoru trójkąta, to $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}$.

3) Zgodnie z ZIM nasz wzór jest prawdziwy dla wszystkich n>0.