

Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2017

andrzej.lachwa@uj.edu.pl

11/14

Współczynniki dwumianowe

Przypomnijmy: współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ to liczba k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego, tzn. $\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(\mathbb{Z}_n)|$. Nazwa "współczynniki dwumianowe" bierze się stąd, że pojawiają się one w rozwinięciu dwumianu $(x + y)^n$.

Twierdzenie o liczbie podzbiorów

Gdyby była istotna kolejność elementów w podzbiorach, to mielibyśmy do czynienia z k -elementowymi wariacjami, więc byłoby ich n^k . Jednak każdy k -elementowy podzbiór można uporządkować na $k!$ sposobów, zatem mamy

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Lematy

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \text{ dla } n \geq k \geq 0,$$

$$\binom{n}{k} = 0, \text{ dla } k > n,$$

$$\binom{n}{1} = n, \text{ dla } n > 0,$$

Reguła symetrii

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \text{ dla } n \geq k \geq 0$$

REGUŁA DODAWANIA

Reguła ta stanowi fundament dla rekurencyjnej procedury obliczania współczynników dwumianowych:

dla $0 < k \leq n$ mamy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Dowody lematów

Pierwszy punkt jest natychmiastową konsekwencją faktu, że dowolny zbiór n -elementowy ma tylko jeden 0-elementowy podzbiór – podzbiór pusty i tylko jeden podzbiór n -elementowy – cały zbiór.

Drugi punkt jest oczywisty, jako że zbiór n -elementowy nie może mieć podzbiorów o k elementach, gdy $k > n$.

Dla dowodu trzeciego punktu, zauważmy jedynie, że podzbiorów jednoelementowych jest dokładnie tyle ile elementów w zbiorze.

Dowód reguły symetrii

Wreszcie dla dowodu ostatniego punktu załóżmy, że $|X| = n \geq k \geq 0$. Wtedy funkcja $\mathcal{P}_k(X) \ni A \mapsto X \setminus A \in \mathcal{P}_{n-k}(X)$ jest bijekcją. Innymi słowy, zamiast wybierać k elementów ze zbioru X można odrzucić $n-k$ elementów.

Dowód reguły dodawania (interpretacja kombinatoryczna)

Założmy, że $|Z| = n$. Wtedy, po usunięciu ze zbioru Z elementu a dostajemy $(n-1)$ -elementowy zbiór Z' . Oczywiście wszystkie k -elementowe podzbiory zbioru Z można podzielić na dwa typy: albo mają w sobie element a , albo go nie mają.

Każdy podzbiór pierwszego typu, czyli $A \in \mathcal{P}_k(Z)$ takie, że $a \in A$ jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje pozostałe $(k-1)$ -elementów ze zbioru Z' . Takich możliwości jest $\binom{n-1}{k-1}$.

W drugim przypadku są to k -elementowe podzbiory $(n-1)$ -elementowego zbioru Z' . Jest więc ich dokładnie $\binom{n-1}{k}$.

A zatem $\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(Z)| = |\mathcal{P}_k(Z')| + |\mathcal{P}_{k-1}(Z')| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

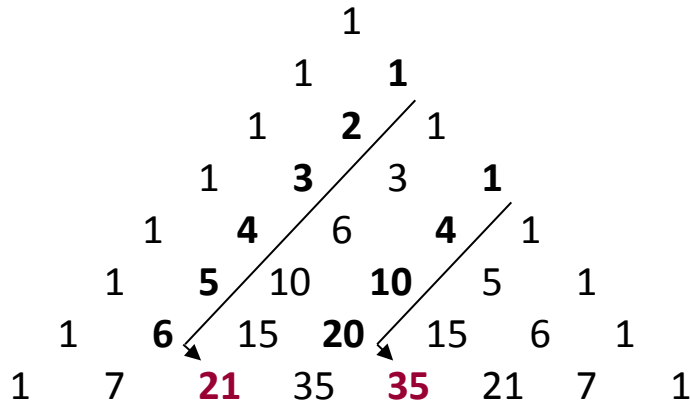
Trójkąt Pascala bazuje na regule dodawania i ustawia współczynniki w następujący sposób:

- wiersze trójkąta numerowane są kolejnymi liczbami naturalnymi $0, 1, \dots$,
- w każdym z wierszy trójkąta występuje dokładnie $n + 1$ liczb i są to kolejno $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$.

Przesunięcie w wierszach, pozwala wyliczyć $\binom{n}{k}$ jako sumę $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ dwu liczb stojących bezpośrednio nad $\binom{n}{k}$.

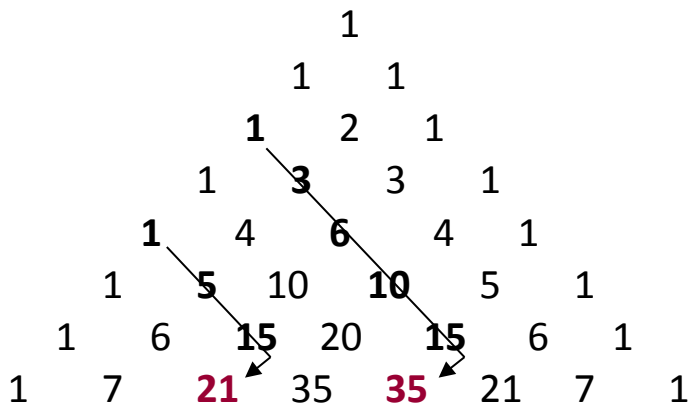
Reguła sumowania po górnym indeksie (sumowanie po przekątnej trójkąta Pascala)

Dla $n, k \in \mathbb{N}$ mamy
$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$



Reguła sumowania równoległego (sumowanie po drugiej przekątnej)

Dla $n, k \in \mathbb{N}$ mamy:
$$\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}.$$



Tożsamość Cauchy'ego (splot Vandermonde'a)

Dla liczb naturalnych m, n, k mamy:
$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

Twierdzenie o dwumianie (wyjaśnia pochodzenie nazwy)

Dla $x, y \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ mamy
$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

Przykłady

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Lemat 1

Dla dowolnego $n \geq 0$ mamy $(1 + x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$.

Lemat 2

Dla dowolnego $n \geq 0$ mamy $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Lemat 3

Dla dowolnego $n \geq 0$ mamy $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0^n$.

(Uwaga: $\binom{0}{0} = 1 = 0^0$)

Zadania

1. Policz 11^4 wykorzystując współczynniki dwumianowe.
2. Niech $n > 0$, $0 \leq k \leq n$. Dla jakich k wartość $\binom{n}{k}$ jest największa?
3. Udowodnij własność sześciokąta

$$\binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{n}{k+1} \cdot \binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n+1}{k+1} \cdot \binom{n}{k-1}$$

Sumy częściowe

Umiemy już policzyć wartość sumy całego wiersza w trójkącie Pascala i wartość naprzemiennej sumy całego wiersza. W praktyce często pojawia się konieczność sumowania tylko pewnego fragmentu takiego wiersza. Do tego pomocne mogłyby być sumy postaci:

$$\sum_{i=0}^m \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{m} \quad (*)$$

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{n}{i} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^m \binom{n}{m} \quad (**)$$

dla $0 \leq m < n$, gdyby miały postać zwartą! Niestety nie jest znana żadna zwarta postać (*).

Druga suma, czyli naprzemienna częściowa suma (**) wiersza trójkąta Pascala **ma postać zwartą**. Wyprowadzenie takiej postaci odwołuje się do uogólnienia współczynnika dwumianowego na dowolne rzeczywiste indeksy górne, i dowolne całkowite indeksy dolne. Pomijamy to wyprowadzenie i przedstawiamy wzór na postać zwartą dla liczb naturalnych:

$$\sum_{i \leq m} (-1)^i \binom{r}{i} = (-1)^m \binom{r-1}{m}.$$

dla naturalnych $r, m: 0 \leq m \leq r$.

Zadanie

Policz na dwa sposoby sumę częściową dla $m=2$.

Mamy również wzór na zwartą postać modyfikacji sumy (**) polegającej na wymnożeniu każdego składnika przez jego odległość od środka trójkąta Pascala.

$$\text{Dla } m, n \geq 0 \text{ zachodzi } \sum_{i=0}^m \binom{n}{2-i} \cdot \binom{n}{i} = \frac{m+1}{2} \binom{n}{m+1}$$

Np. dla $n=6$ i $m=4$ mamy sumę:

$$3 \cdot \binom{6}{0} + 2 \cdot \binom{6}{1} + 1 \cdot \binom{6}{2} + 0 \cdot \binom{6}{3} + (-1) \cdot \binom{6}{4} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 15 - 1 \cdot 15 = 15$$

$$\text{oraz postać zwartą } \frac{4+1}{2} \cdot \binom{6}{5} = \frac{5}{2} \cdot 6 = 15$$

Reguła odwracania

Dla funkcji $f, g: Z \rightarrow R$ zachodzi

$$f(n) = \sum_{i \in Z} \binom{n}{i} (-1)^i g(i) \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad g(n) = \sum_{i \in Z} \binom{n}{i} (-1)^i f(i).$$

Zadania

Obliczyć $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{k}$.

Wykazać, że $\sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Zadania

1. W kolejce stoi n studentów. Wchodzą oni na egzamin w k niepustych grupach. Na ile sposobów można utworzyć te grupy?
2. Ile rozwiązań w liczbach naturalnych ma równanie $x_1+x_2+\dots+x_k=n$?
3. Na ile sposobów można ustawić n osób w kolejkach do k ponumerowanych okienek pocztowych, przy czym dopuszczamy puste kolejki (zamknięte okienka).
4. Ile jest rosnących funkcji odwzorowujących zbiór $\{1,2,\dots,k\}$ w zbiór $\{1,2,\dots,n\}$? A ile jest takich funkcji niemalejących?
5. Na ile sposobów można rozmieścić 6 przedmiotów w trzech różnych pojemnikach tak, by w każdym były dokładnie dwa przedmioty?