Matematyka dyskretna

andrzej.lachwa@uj.edu.pl

10/14

Permutacje

Permutacja zbioru skończonego *X* to bijekcja z *X* w *X*. Zbiór permutacji zbioru $\mathbb{Z}_n$ oznaczamy przez S_n, a permutacje małymi literami greckimi.

Np. rozważ funkcję $\alpha : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$ zadaną przez poniższą tabelę:

n	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha(n)$	2	3	6	0	4	1	5

Funkcja α jest bijekcją z $\mathbb{Z}_7$ w $\mathbb{Z}_7$, zatem jest permutacją i $\alpha \in S_7$.

Dla dowolnych permutacji α, β skończonego zbioru *X* złożenia $\alpha\beta, \beta\alpha$ są permutacjami *X*, oraz α^{-1} jest permutacją *X* taką, że jej złożenie z α daje funkcję identycznościową.

Zbiór *n*-elementowy ma dokładnie *n!* permutacji, czyli $|S_n| = n!$.

Niech α będzie permutacją *n*-elementowego zbioru *X*.

Cykl zbioru *n*-elementowego *X* to taka permutacja zbioru *X*, dla której $\{x, \alpha(x), \alpha^2(x), \ldots, \alpha^{n-1}(x)\} = X$, przy dowolnym $x \in X$.

Łatwo zauważyć, że jeśli dla pewnego $x_0 \in X$ zachodzi powyższa równość, to jest tak dla wszystkich $x \in X$, czyli α jest cyklem na *X*.

n	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha(n)$	2	3	6	0	4	1	5

Np. 0, $\alpha(0)=2$, $\alpha(2)=6$, $\alpha(6)=5$, $\alpha(5)=1$, $\alpha^5(0)=\alpha(1)=3$

i $\alpha^6(0)=\alpha(3)=0$

Weźmy bowiem $\{\alpha(x), \alpha^2(x), \ldots \alpha^{n-1}(x), \alpha^n(x)\}$. Ten zbiór jest równy *X*, bo jest to $\alpha(X)$. Zatem $\alpha^n(x)=x$.

Cykl α zbioru *X* zapisujemy jako $(x, \alpha(x), \ldots, \alpha^{n-1}(x))$ dla dowolnie wybranego $x \in X$.

Np.

n	0	1	2	3	4	5
$\alpha(n)$	3	5	0	1	2	4

więc sekwencja 0, $\alpha(0) = 3$, $\alpha^2(0) = 1$, $\alpha^3(0) = 5$, $\alpha^4(0) = 4$, $\alpha^5(0) = 2$ pokrywa całe $\mathbb{Z}_6$, zatem $\alpha = (0, 3, 1, 5, 4, 2)$ jest cyklem.

Niech α będzie permutacją n-elementowego zbioru X. Permutację α nazywamy **cykle*m k*-elementowym** ($k \leq n$) jeżeli dla pewnego k-elementowego podzbioru $I=\{i_1, i_2, \ldots i_k\}$ zbioru X zachodzi

$\alpha(i_1)= i_2$, $\alpha(i_2)= i_3$, … $\alpha(i_{k-1})= i_k$, $\alpha(i_k)= i_1$ oraz $\alpha(i)= i$ dla wszystkich $i \notin I$.

Piszemy wtedy $\alpha=(i_1, i_2, \ldots i_k)$, ale również $\alpha=(i_2, i_3, \ldots i_k, i_1)$ …

Np.

n	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha(n)$	2	3	6	0	4	1	5

jest cyklem 6-elementowym (0, 2, 6, 5, 1, 3), bo

$\alpha(0)=2$, $\alpha(2)=6$, $\alpha(6)=5$, $\alpha(5)=1$, $\alpha(1)=3$, $\alpha(3)=0$

i $\alpha(4)=4$.

Dwa cykle nazwiemy **rozłącznymi** jeżeli ich zbiory wskaźników nie mają wspólnych elementów.

Przykłady

Permutacja $\alpha \in S_7$

n	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha(n)$	2	3	6	0	4	1	5

ma cykl 5-elementowy (0, 2, 6, 5, 1, 3) i cykl 1-elementowy (4)

Permutacja 8-elementowa

n	0	1	2	3	4	5	6	7
α(*n*)	5	2	1	7	3	6	0	4

ma m.in. cykl 3-elementowy (056) i cykl dwuelementowy (12).

ROZKŁAD PERMUTACJI NA ROZŁĄCZNE CYKLE

Dowolną permutację α zbioru *X* można rozłożyć na rozłączne cykle w sposób następujący:

- wybierz dowolny element $x \in X$, który nie jest jeszcze w żadnym cyklu,
- iteruj permutację α otrzymując kolejno: $\alpha(x), \alpha^2(x), \alpha^3(x), \ldots$ aż do uzyskania $\alpha^j(x) = x$,
- dodaj do rozkładu cykl $x, \ldots, \alpha^{j-1}(x)$,
- jeśli w zbiorze *X* pozostały jeszcze elementy niepokryte przez żaden cykl, to wróć do pierwszego punktu.

Jeśli permutacja α złożona jest z *k* rozłącznych cykli, to zapisujemy
$\alpha = (x_0, \ldots)(x_1, \ldots) \ldots (x_{k-1}, \ldots)$.

Rozważmy jeszcze raz permutację $\alpha \in S_7$:

n	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha(n)$	2	3	6	0	4	1	5

Rozkład α na cykle:

0, α(0)=2, α(2)=6, α(6)=5, α(5)=1, α(1)=3, α(3)=0,

4, α(4)=4

więc α=(026513)(4).

Dla permutacji β

n	0	1	2	3	4	5	6	7
β (*n*)	5	2	1	7	3	6	0	4

β = (056)(12)(374)(56).

ZADANIE

Na ile sposobów można rozstawić 8 wież na ponumerowanych polach szachownicy 8x8 w taki sposób, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia?

Rozwiązanie

Rozważamy rozłożenia ośmiu wież w taki sposób, aby w każdej linii i w każdej kolumnie znajdowała się dokładnie jedna wieża. Każde takie rozłożenie jednoznacznie wyznacza bijekcję ze zbioru wierszy (1,...8} w zbiór kolumn {a, b, …, h}. Jest ich 8!=40320.

Generowanie podzbiorów

Weźmy n-elementowy zbiór $X=\{x_1, x_2 \dots x_n\}$. Każdemu podzbiorowi $Y \subset X$ przyporządkujemy ciąg binarny $b_0 b_1 \dots b_{n-1}$ określony następująco:

$$b_i = \begin{cases} 0: & x_{i+1} \notin Y \\ 1: & x_{i+1} \in Y \end{cases}$$

Otrzymujemy wtedy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy elementami $\mathscr{P}(X)$ a ciągami binarnymi długości n, czyli liczbami binarnymi z przedziału $[0, 2^n-1]$ postaci $\sum_{i=0 \dots n-1} b_i 2^i$ oznaczanymi np. jako $[b_{n-1} \dots b_0]$.

Ciąg binarny stanowi wygodną reprezentację maszynową podzbioru X, a kolejne liczby binarne określą wszystkie podzbiory zbioru X.

ZADANIE

Ile jest par postaci (*A*, *B*), gdzie $A \subseteq B \subseteq X$, gdy $|X| = n$?

Wskazówka: zaproponuj odpowiednią reprezentację dla takich par!

Rozwiązanie

Dla dowolnej pary (*A*, *B*) weźmy funkcję $\chi_{A,B} : X \longrightarrow \{0,1,2\}$

zdefiniowaną jako

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 2, & \text{gdy } x \in A \\ 1, & \text{gdy } x \in B \setminus A \\ 0, & \text{gdy } x \in X \setminus B \end{cases}$$

Każdej taka funkcja odpowiada wzajemnie jednoznacznie parze (*A*, *B*).

Zatem $|\{(A,B) : A \subseteq B \subseteq X\}| = 3^{|X|}$, bo jest to liczba funkcji ze zbioru *X* w zbiór {0, 1, 2}.

Zliczanie relacji

Ile jest różnych relacji binarnych określonych na skończonym zbiorze *X*?

Każda taka relacja jest podzbiorem $X \times X$. Jeśli zbiór X ma n elementów, to zbiór X^2, ma nn elementów (z zasady mnożenia). Różnych relacji jest tyle, co różnych podzbiorów X^2, czyli 2^{nn}.

Każdą relację na X można przedstawić w postaci kwadratowej tablicy, a liczba relacji to liczba możliwych układów jedynek w takiej tablicy.

A jeśli chcielibyśmy policzyć tylko relacje zwrotne?

Każda relacja zwrotna ma jedynki na przekątnej, w pozostałych miejscach mogą być zera lub jedynki. Tych pozostałych miejsc jest $n^2–n$, więc relacji zwrotnych jest $2^{n(n-1)}$.

Ile jest różnych relacji symetrycznych?

Relacja symetryczna ma dowolnie wypełnione pole na przekątnej i pod przekątną. Nad przekątną musi się znaleźć lustrzane odbicie układu pod przekątną. Relację symetryczną możemy więc określić wpisując jedynki albo zera do $n(n+1)/2$ pól; relacji takich jest więc $2^{n(n+1)/2}$.

Ile jest relacji równoważności?

Każda taka relacja to podział na bloki (klasy abstrakcji). Liczba podziałów zbioru n-elementowego na k bloki to tzw. **liczba Stirlinga drugiego rodzaju**.

Liczba wszystkich podziałów zbioru n-elementowego (liczba wszystkich relacji równoważności) to tzw. **liczba Bella**. Jest to suma n-tego wiersza **trójkąta Stirlinga dla podziałów**. Por. wykład 11/14.

WARIACJE

Ciąg k-elementowy o wyrazach ze zbioru n-elementowego nazywa się k- wyrazową **wariacją** tego zbioru. Ciąg k-elementowy, którego wyrazy nie powtarzają się, nazywa się k- wyrazową **wariacją bez powtórzeń**.

Liczba k-wyrazowych wariacji zbioru n-elementowego wynosi n^k.

Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, dla n≥k, wynosi $n^{\underline{k}} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Zamiast mówić o ciągach bez powtórzeń można mówić o funkcjach różnowartościowych. Weźmy więc zbiór k elementowy X i zbiór n elementowy Y oraz wszystkie różnowartościowe funkcje z X do Y. Każda taka funkcja odpowiada wariacji bez powtórzeń.

UwagaL Dla $k>n$ nie ma takich funkcji.

Przykład

W zawodach punktuje się 6 pierwszych miejsc. Startuje 21 drużyn, w tym drużyna polska. Ile może być wyników zawodów? A ile wyników, gdy Polska zajmuje jedno z punktowanych miejsc?

Rozwiązanie

Wynik może być reprezentowany 6-elementowym ciągiem nazw drużyn zajmujących miejsca od pierwszego do szóstego. W przypadku pierwszego pytania, takich ciągów może być $p_1=21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16$.

W przypadku drugiego pytania, przyjmujemy, że jedno z sześciu miejsc punktowanych jest już zajęte przez drużynę polską. Na pierwsze wolne miejsce w tym ciągu możemy wstawić jedną z 20 pozostałych drużyn, na drugie wolne – jedną z 19 pozostałych drużyn, itd. Zatem liczba możliwych wyników $p_2=20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16$.

ROZMIESZCZENIA UPORZĄDKOWANE

Ile jest różnych możliwych rozmieszczeń uporządkowanych k elementów w n pudełkach?

Pierwszy element możemy umieścić na n sposobów. Drugi albo w pustym pudełku, których jest n-1, albo w pudelku z pierwszym elementem na dwa sposoby (przed nim lub po nim); czyli łącznie na n+1 sposobów.

Jak już umieściliśmy w pudełkach i-1 elementów, to w kolejnych pudełkach znajduje się i_1, i_2, … i_n elementów oraz $i_1 + i_2 + \ldots + i_n = i-1$. Element i-ty możemy włożyć do pierwszego pudełka na i_1+1 sposobów, do drugiego na i_2+1 sposobów, itd. Łącznie na $(i_1+1)+(i_2+1)+\ldots+(i_n+1) = n+i-1$ sposobów.

Liczba rozmieszczeń uporządkowanych k elementów w n pudełkach wynosi $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1) = n^{\overline{k}}$.

ROZMIESZCZANIA NIEUPORZĄDKOWANE

(wersja 1)

Sposobów rozmieszczenia *n* identycznych przedmiotów w *k* rozróżnialnych pudełkach jest $\binom{n+k-1}{k-1}$ **.**

(wersja 2)

Liczba sposobów wyboru zbioru *n* przedmiotów (dopuszczalne są powtórzenia) *k* rozróżnialnych typów wynosi $\binom{n+k-1}{k-1}$ **.**

Uwaga! Porównaj przykład z deserami złożonymi z 5 kulek lodów o 3 smakach.

Zadanie

W sali banku są czynne 3 okienka. Na ile sposobów 23 klientów może ustawić się w kolejkach do tych okienek?

Zadanie

Na ile sposobów można wybrać 10 cukierków w trzech smakach?

Zadanie

Na ile sposobów możemy pokolorować graf o p ponumerowanych wierzchołkach farbami w r kolorach?

Zadanie

Ile jest różnych n-cyfrowych liczb naturalnych?

UWAGA: We wszystkich tych zadaniach zacznij od wskazania takiej reprezentacji, dla której można będzie zaproponować odpowiedni wzór!

ZADANIA Z KARTAMI: POKER

Talia kart składa się z 4 kolorów zwanych trefl, karo, kier i pik. Każdy kolor składa się z 13 kart: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, W, D, K, A.

Układ kart w ręce (figura) jest zbiorem (!!!) 5 kart z talii 52 kart. Kolejność wyboru kart nie jest istotna.

Rodzaje figur:

- ✓**poker królewski** to 10,W,D,K,A w jednym kolorze
- ✓**poker** to sekwens w jednym kolorze nie będący pokerem królewskim (sekwens to 5 kolejnych kart, przy czym as może stać przed dwójką lub za królem)
- ✓**czwórka** to układ zawierający 4 karty tej samej wysokości, np. DDDD
- ✓**ful** to 3 karty tej samej wysokości i 2 karty tej samej wysokości

- ✓**kolor** to 5 kart w jednym kolorze nie tworzących ani pokera królewskiego, ani pokera
- ✓**strit** to sekwens nie będący ani pokerem, ani pokerem królewskim
- ✓**trójka** to 3 karty tej samej wysokości, czwarta innej i piąta jeszcze innej
- ✓**dwie pary** to 2 karty tej samej wysokości, 2 karty innej, lecz między sobą tej samej wysokości, i piąta karta jeszcze innej wysokości
- ✓**para** to 2 karty tej samej wysokości, pozostałe dowolne ale łącznie nie tworzące żadnego z wymienionych wyżej rodzajów układów
- ✓**zerówka** to układ, który nie jest żadnego z powyższych rodzajów.

Powyższa kolejność jest odwrotna do szansy otrzymania figury danego rodzaju.

1. **Ile jest układów kart w pokerze?** Pokaż, że jest to 2 598 960.

2. **Ile układów, to fule?** Trochę wcześniej wprowadziliśmy pojęcie „typ fula”. I pokazaliśmy, że jest tych układów $\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}$ dla jednego typu oraz 13·12 różnych typów. Zatem 24·156 = 3744 możliwości.

Zakładając, że każdy układ jest jednakowo prawdopodobny i przyjmując, że prawdopodobieństwo zdarzenia to iloraz liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu przez liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych, prawdopodobieństwo wyciągnięcia fula to 3744/2598960 = 0.001440 czyli około 1,5 promila.

Policz prawdopodobieństwa pozostałych rodzajów figur w pokerze!