Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2017

andrzej.lachwa@uj.edu.pl

Zadania 1

Udowodnij, że $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ za pomocą diagramów Venna.

Udowodnij formalnie,

że $(A \subset B$ i $A \subset C) \Rightarrow A \subset B \cap C$ oraz

że $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$

Sprawdź, czy prawdziwe są zdania:

$(A \cap B = A \cap C \Rightarrow B=C)$, $(A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B=C)$,

$(A \cup B = A \cup C \Rightarrow B=C)$, $(A \cup B \subset A \cap B \Rightarrow A=B)$, $(A \cap B = A' \cup B')$?

Czy to prawda, że dla dowolnego zbioru S zbiór $\mathscr{P}(S)$ ma co najmniej 2 elementy?

Udowodnij, że $\varnothing \subset \{\varnothing\}$, $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, $((S$ jest zbiorem$) \Rightarrow$ to $\varnothing \subset S)$.

Czy to prawda, że $[0, 1] \setminus (0, 1) = \{0, 1\}$?

Wyznacz zbiór $[0, 3] \setminus [2, 6]$ oraz zbiór $[0, 3]'$

Wypisz elementy $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$, gdzie $A=\{a, b\}$

Wypisz elementy $\mathscr{P}(A\times B)$, gdzie $A=\{a, b\}$, $B=\{0,1\}$

Przypomnij definicję algebry Boole'a.

Udowodnij, że odejmowanie zbiorów nie jest działaniem przemiennym.

Narysuj diagram Venna dla 4 zbiorów.

Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów $(A\setminus B)\cup B=A$?

Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów $A \oplus B = \emptyset$ wtw $A=B$?

Wyznacz obraz zbioru {-2, -1, 0} przez funkcję f:R→R; $f(x)=x$.

Czy prawdą jest, że $f(A \cap B)=f(A) \cap f(B)$ oraz $f^{-1}(A \cap B)=f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$?

Operacją n-argumentową w zbiorze X nazywamy funkcję z X^n w X.
Czy +, −, · , / są 2-argumentowymi operacjami w R?

Zdefiniuj 3-argumentową operację o przepisie x^n+y^2+5.

Narysuj funkcje min(a,b), max(a,b), a+b, min(1, a+b), ab, …

Czy to prawda, że dla dowolnych $R_1, R_2 \subseteq X^2$ zachodzi

$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$?

Czy suma dwóch relacji równoważności w X jest równoważnością w X?

Wskaż relację odwrotną do funkcji 3x2+1.

Rozłóż liczby 6399 i 4896 na czynniki pierwsze w pamięci.

Przeczytaj litery greckie $\boldsymbol{\kappa}$ $\boldsymbol{\lambda}$ $\boldsymbol{\mu}$ $\boldsymbol{\nu}$ $\boldsymbol{\xi}$ $\boldsymbol{o}$ $\boldsymbol{\pi}$?

Uzasadnij $\forall n \in Z$: $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$

Narysuj funkcję $x \to \lfloor x/2 \rfloor + \lceil x/2 \rceil$ dla $x \in R$

Narysuj funkcję $x \to x - \lfloor x \rfloor$ dla $x \in R$

Rozwiąż równania: $\lfloor (3x\text{-}2)/4 \rfloor = (2x\text{-}1)/5$, $\lfloor (3x\text{-}4)/5 \rfloor = (2x\text{-}1)/3$.

Jak wygląda funkcja podłogi funkcji f(x)=x?

Mamy funkcję z dziedziny NxN w N postaci $f(n,k)=\min(n,k)$. Znajdź $f^{-}(4)$.

Udowodnij, że jeśli A zwrotna to $A \cap A^{-1}$ jest tolerancją.

Co to jest surjekcja?

Co to jest funkcja charakterystyczna zbioru *A* w przestrzeni *S*?

Niech *A* relacja w zbiorze *S*. Co to znaczy, że $xAAAy$, dla $x, y \in S$.

Przeczytaj litery greckie ν ι σ ρ ε ω μ ϕ ξ.

Relacja R jest przechodnia wtw gdy $R^2 \subseteq R$.

Relacja R jest przechodnia wtw gdy $R = R^d$.

Relacja zwrotna zawiera relację równości.

Relacja pełna i relacja równości są zwrotne.

Relacja przeciwzwrotna jest relacją niezwrotną.

Macierz relacji przeciwzwrotnej ma zera na przekątnej.

Relacja pusta jest przeciwzwrotna.

Macierz relacji symetrycznej jest symetryczna względem przekątnej.

Relacja A jest symetryczna wtw gdy $A=A^{-1}$.

Relacja A jest przeciwsymetryczna wtw gdy $A \cap A^{-1}=\emptyset$.

Relacje pusta, pełna, równości i nierówności są symetryczne.

Relacja pusta jest również przeciwsymetryczna.

Relacja przeciwsymetryczna jest przeciwzwrotna.

Relacja równości nie jest przeciwsymetryczna!

Relacja A jest antysymetryczna wtw gdy $A \cap A^{-1} \subseteq$ E (gdzie E to relacja równości).

Relacje pusta i równości są antysymetryczne.

Relacja $<$ w zbiorze liczb rzeczywistych jest …

Relacja $\leq$ w zbiorze liczb rzeczywistych jest …

Jeśli A, B są zwrotne to $A \cup B$, $A \cap B$, AB, A^{-1}, A^{d} są zwrotne.

Jeśli A, B są przeciwzwrotne to $A \cup B$, $A \cap B$, A^{-1} są przeciwzwrotne.

Jeśli A, B są symetryczne to $A \cup B$, $A \cap B$, A^{-1} są symetryczne.

Domknięcie relacji symetrycznej jest symetryczne.

Jeśli A jest przeciwsymetryczna to A^{-1} jest przeciwsymetryczna.

Jeśli A jest przeciwsymetryczna to dla dowolnej B relacja $A \cap B$ jest przeciwsymetryczna.

Jeśli A, B są antysymetryczne to $A \cap B$, A^{-1} są antysymetryczne.

Jeśli A, B są przechodnie to $A \cap B$, A^{-1} i A^{d} są przechodnie.
Jeśli A i B są tolerancjami, to $A \cup B$, $A \cap B$, A^{-1}, A^{d} są tolerancjami.

Domknięcie tolerancji A jest najmniejszą relacją równoważności zawierającą A.

Jeśli A jest zwrotna, to $A \cup A^{-1}$, $A \cap A^{-1}$, $A\,A^{-1}$ są tolerancjami.

Udowodnij, że liczba $8^{n+2}+9^{2n+1}$ jest podzielna przez 73 dla wszystkich liczb naturalnych.

Dla jakich liczb zachodzi wzór $4n \leq n^2-7$?

Weźmy zdanie $p(n)$ postaci „n^2+5n+1 jest liczbą parzystą”.
Udowodnij, że dla każdego naturalnego $k>0$ z $p(k)$ wynika $p(k+1)$.
Dla jakich liczb prawdziwe jest $p(k)$?

Udowodnij, że $6 \mid 8^n - 2^n$ dla wszystkich liczb naturalnych.

Udowodnij, że $7 \mid 11n - 4n$ dla wszystkich liczb naturalnych.

Udowodnij, że $7 \mid 11^n - 4^n$ dla wszystkich liczb naturalnych.

Udowodnij, że $n^2 > n+1$ dla wszystkich naturalnych $n>1$.

Udowodnij:

$10 \mid (n^5 - n)$

$12 \mid (10^n - 4)$ dla $n>1$

$(2n)! \geq (2n)^n$ dla $n>0$

$(1 + {}^1/_n)^n \leq n+1$ dla $n>0$

$37^{100}-37^{20}$ jest wielokrotnością 10

$37^{20}-1$ jest wielokrotnością 10

$5 \mid n^5 - n.$

Udowodnij, że suma sześcianów kolejnych liczb naturalnych to ich kwadrat sumy:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2$$

Udowodnij, że $10 \mid 37^{100} - 37^{20}$.

Udowodnij, że $10 \mid 37^4 - 1$.

Udowodnij indukcyjnie, że $4+10+16+\ldots+(6n-2) = n(3n+1)$

Udowodnij indukcyjnie, że $2 \mid n^2+5n+1$.

Udowodnij indukcyjnie, że $8 \mid 5^{n+1}+2\cdot 3^{n}+1$.

Udowodnij indukcyjnie, że $73 \mid 8^{n+2}+9^{2n+1}$.

Sprawdź, czy to prawda, że $\lfloor \log 223344 \rfloor < \lfloor \lg 234 \rfloor$.

Ile cyfr ma liczba dziesiętna *k*?

Rozwiąż równanie: $\lfloor (2x-3)/4 \rfloor = (3x-4)/5$.

Rozwiąż równanie: $\lfloor (3x-4)/5 \rfloor = (x-2)/3$.