Matematyka dyskretna

andrzej.lachwa@uj.edu.pl

4A/15

Liczby Fibonacciego

Spośród ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie, jednym z najsłynniejszych jest ciąg Fibonacciego (z roku 1202) zadany przez

$$\begin{cases} f_0 = 0, \\ f_1 = 1, \\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1}. \end{cases}$$

Wszystkie wyrazy ciągu, oprócz pierwszych dwu, są sumą dwu poprzednich elementów. Oto kilka pierwszych wartości ciągu Fibonacciego:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Jak odgadnąć wzór na ogólny wyraz ciągu? Nie jest to proste. Czekano na to 600 lat!

Własność ilorazu

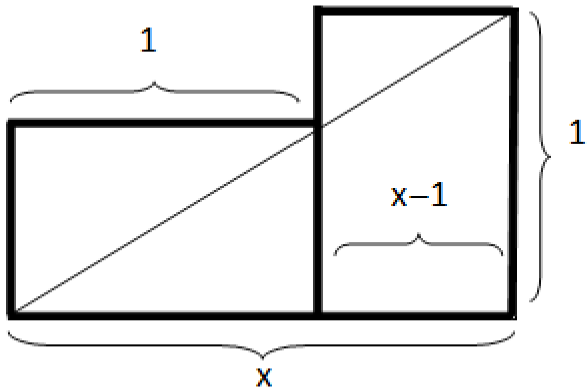
Iloraz dowolnego elementu ciągu Fibonacciego i jego poprzednika jest ze wzrostem wskaźnika coraz lepszym przybliżeniem „boskiej liczby” Φ. Przy 14 elemencie przybliżenie daje już dokładność 14 miejsc dziesiętnych. Liczba Φ, określająca tzw. złotą proporcję, odkryta została w starożytnej Grecji, a udokumentowana przez Euklidesa (300 pne).

Złota liczba

Φ = 1,618 033 988 7…

Liczba x jest złotą liczbą, gdy

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$



Równanie $x^2 - x - 1 = 0$ ma dwa rozwiązania, z których jedno jest dodatnie i wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. I to jest właśnie złota liczba Φ = 1,618 …

Potęgowanie liczby Φ

$\Phi^2 = \Phi + 1$

$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = 2\Phi + 1$

$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = (2\Phi + 1) + (\Phi + 1) = 3\Phi + 2$

$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = f_n \cdot \Phi + f_{n-1}$ gdzie f_n to elementy ciągu Fibonacciego

Odwrotność liczby Φ

$1/\Phi = \Phi - 1$

Suma początkowych liczb Fibonacciego

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = 1+1+2+3+5+\ldots+f_n = f_{n+2}-1 \qquad \text{(dowód indukcyjny)}$$

Przykład

$a_{25} + \ldots + a_{40} = a_{42} - 1 - (a_{26} - 1) = a_{42} - a_{26}$

Trójki pitagorejskie

Trójką pitagorejską nazywamy trzy liczby naturalne spełniające równanie twierdzenia Pitagorasa: $a^2+b^2=c^2$. Pierwszą taką trójką jest 3, 4, 5.

Większe trójki można konstruować wykorzystując dowolne cztery kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego. Trójkę utworzą: (1) iloczyn dwóch skrajnych wyrazów, (2) podwojony iloczyn dwóch środkowych wyrazów i (3) suma kwadratów dwóch środkowych wyrazów.

Np. 2, 3, 5, 8; $2\cdot8=16$, $2\cdot3\cdot5=30$, $3\cdot3+5\cdot5=34$; $16^2+30^2=256+900=1156=34^2$

Twierdzenie Fermata (udowodnione po 350 latach, w 1995)

Nie istnieje trójka liczb całkowitych będąca rozwiązaniem równania $a^n=b^n+c^n$ dla $n>2$.

Liczby pierwsze w ciągu Fibonacciego

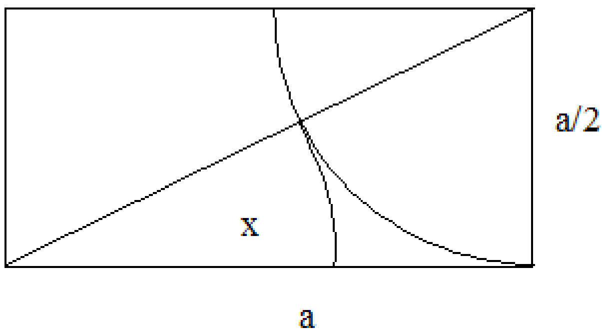
Te wyrazy f_n które są liczbami pierwszymi mogą występować tylko na miejscu *n* będącym liczbą pierwszą (ale nie na odwrót).

Hipoteza

W ciągu Fibonacciego występuje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

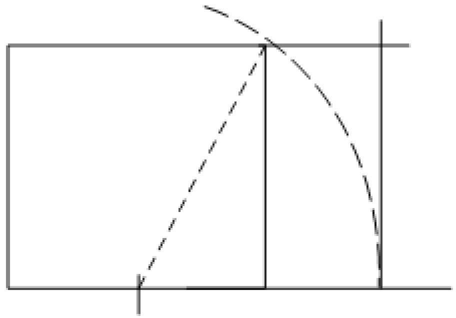
Ćwiczenie

Konstrukcja złotego podziału odcinka o długości a



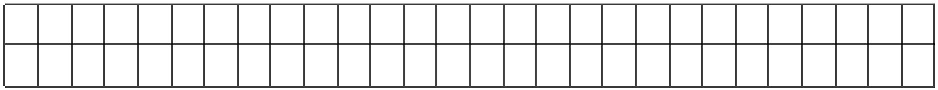
Ćwiczenie

Konstrukcja złotego prostokąta



Przykład

Na ile sposobów można ułożyć kostki domina (o wymiarach 1×2) na prostokącie o rozmiarze $2\times n$?



Oznaczmy, tę liczbę przez d_n w zależności od n.

Dla n=1 jest to możliwe na dokładnie jeden sposób, tzn. d_1 =1.

Dla n=2 są już dwa takie sposoby: ustawiamy obie kostki poziomo, lub obie pionowo, a zatem d_2 =2.

Dla n=3 są trzy sposoby.

W ogólnym przypadku musimy jakoś pokryć dwa skrajne pola przylegające do krótszej krawędzi. Można to zrobić na dwa sposoby:

1. ułożyć jedno domino pionowo - pozostanie prostokąt $2 \times (n-1)$, który można pokryć na d_{n-1} sposobów,

2. ułożyć dwa domina poziomo - pozostanie prostokąt $2 \times (n-2)$, który można pokryć na d_{n-2} sposobów.

Czyli łącznie jest $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$ sposobów pokrycia tablicy 2 na n.

Rozpoznajemy w tym łatwo ciąg Fibonacci'ego.

Wzór $f_0^2 + f_1^2 + \ldots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$.

Dowód przez indukcję po *n*:

dla *n*=0 mamy $f_0^2 = 0 = f_0 \cdot f_1$,

do założonej indukcyjnie równości $f_0^2 + f_1^2 + \ldots + f_k^2 = f_k \cdot f_{k+1}$ dodajmy obustronnie f_{k+1}^2 otrzymując

$$f_0^2 + f_1^2 + \ldots + f_k^2 + f_{k+1}^2 = f_k \cdot f_{k+1} + f_{k+1}^2 = f_{k+1} \cdot (f_k + f_{k+1}) = f_{k+1} \cdot f_{k+2},$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego.

Ogólna postać wzoru na wyraz ciągu Fibonacciego (1843)

(twierdzenie wzór Eulera-Bineta)

$$\mathbf{f_n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Dowód: proszę przestudiować w wykładzie z matematyki dyskretnej [4].

Szkic dowodu:

Dowód rozpoczyna się od zauważenia, że jeśli x_0 jest rozwiązaniem równania $x^2 = x + 1$ to ciąg x_0^n spełnia zależność rekurencyjną Fibonacciego: $x_0^n = x_0^{n-1} + x_0^{n-2}$.

Jednak pierwiastkami równania są $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
I okazuje się, że żaden z ciągów x_1^n, x_2^n nie jest ciągiem Fibonacci'ego, bo na przykład ilorazy kolejnych wyrazów takiego ciągu są stałe.

Zauważmy dalej, że jeżeli ciąg *a* spełnia równanie Fibonacciego, to $\alpha \cdot a$ też.

Jeżeli ciągi *a*, *b* spełniają, to *a+b* też.

Zatem może poszukiwanym rozwiązaniem jest kombinacja liniowa tych pierwiastków? Tak.

Na koniec dowodzimy indukcyjnie, że wzór spełnia równanie rekurencyjne (poniżej używa się małej litery φ, zamiast Φ).

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varphi)^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 = f_0,$$

$$F(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi - \frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1) = 1 = f_1,$$

Aby pokazać, że $F(k+2) = f_{k+2}$ użyjemy pod koniec naszych obliczeń założenia indukcyjnego, że $F(k+1) = f_{k+1}$ i $F(k) = f_k$, a także tego, że zarówno φ jak i 1–φ spełniają zależność $x^{k+2} = x^{k+1} + x^k$:

$$\begin{aligned}
F(k+2) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{k+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varphi)^{k+2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^k + \varphi^{k+1}) - \frac{1}{\sqrt{5}}((1-\varphi)^k + (1-\varphi)^{k+1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^k - (1-\varphi)^k) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{k+1} - (1-\varphi)^{k+1}) \\
&= F(k) + F(k+1) \\
&= f_k + f_{k+1} \\
&= f_{k+2}.
\end{aligned}$$

Wniosek Keplera

Granicą ilorazów sąsiednich elementów ciągu Fibonacciego jest liczba Φ.

Dowód (tu również małe φ)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1}-(1-\varphi)^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n}-(1-\varphi)^{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi-\frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varphi)(\frac{1-\varphi}{\varphi})^{n}}{\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\varphi}{\varphi})^{n}}$$

$$=\varphi,$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, iż $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right)^{n}=0,$

jako że $\left|\frac{1-\varphi}{\varphi}\right|<1$.

Macierze liczb Fibonacci'ego

Rozważmyc specjalne kwadratowe macierze 2 x 2 liczb Fibonacci'ego o postaci

$$\begin{bmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{bmatrix}$$

Łatwo zauważamy, że

$$\begin{bmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+3} & f_{n+2} \\ f_{n+2} & f_{n+1} \end{bmatrix}.$$

a ponieważ równocześnie

$$\begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

to łatwo indukcyjnie udowodnić, że

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n.$$

Przyrównując wyznaczniki obu macierzy otrzymujemy tożsamość, którą jako pierwszy opublikował Jean-Dominique Cassini w 1680 roku:

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

Korzystając z kolei z faktu, że $A^m A^n = A^{m+n}$ dla dowolnej kwadratowej macierzy A, otrzymujemy:

$$f_n^2 + f_{n-1}^2 = f_{2n-1},$$
$$f_{n+1}f_m + f_n f_{m-1} = f_{m+n}.$$

Rozwiązywanie liniowych równań rekurencyjnych
(uogólniony ciąg Fibonacci'ego)

$$\begin{cases} s_0=A \\ s_1=B \\ s_{n+2}=a\cdot s_{n+1}+b\cdot s_n \end{cases}$$

x^2-ax-b=0, przy $b\neq 0$, $a\neq 0$, nazywamy charakterystycznym równaniem tej rekurencji.

Przypadek 1: $a\neq 0$, $b=0$
ciąg ma postać A, B, aB, a^2B, a^3B, …
zatem $s_n=a^n\cdot s_1$, $s_0=A$, $s_1=B$

Przypadek 2: $b\neq 0$, $a=0$
ciąg ma postać A, B, Ab, Bb, Ab^2, Bb^2, …
zatem mamy dwa przeplatające się ciągi geometryczne Ab^k, Bb^k.

Przypadek 3: $b \neq 0$, $a \neq 0$ i równanie ma dwa różne pierwiastki r_1, r_2.
Wtedy rozwiązanie rekurencji ma postać

$$s_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n \quad \text{(udowodnić indukcyjnie!)}$$

gdzie stałe wyznacza się z warunków brzegowych

$$\begin{cases} s_0 = c_1 + c_2 \\ s_1 = c_1 \cdot r_1 + c_2 \cdot r_2 \end{cases}$$

Przypadek 4: $b \neq 0$, $a \neq 0$ i równanie ma podwójny pierwiastek r_0.
Wtedy rozwiązanie rekurencji ma postać

$$s_n = c_1 \cdot r_0^n + c_2 \cdot n \cdot r_0^n \quad \text{(udowodnić indukcyjnie!)}$$

gdzie stałe wyznacza się z warunków brzegowych

$$\begin{cases} s_0 = c_1 \\ s_1 = c_1 \cdot r_0 + c_2 \cdot r_0 \end{cases}$$

1. Przykład – rozwiązać rekurencję

$$\begin{cases} s_0=1 \\ s_1=8 \\ s_{n+2}=4\cdot s_{n+1}-4\cdot s_n \end{cases}$$

Równanie charakterystyczne ma postać $x^2-4x+4=0$, więc mamy podwójny $r_0=2$; warunki brzegowe $1=c_1$ oraz $8=c_1\cdot 2+c_2\cdot 2$, *czyli* $c_1=1$, $c_2=3$, a zatem:

$$s_n=2^n+3n\cdot 2^n$$

2. Znajdź postać zwartą wzoru

$$\begin{cases} s_0 = 5 \\ s_1 = 6 \\ s_{n+2} = 7 \cdot s_{n+1} + 0 \cdot s_n \end{cases}$$

- $x^2 = 7x+0$
- ciąg ma postać 5, 6, $7 \cdot 6$, $7^2 \cdot 6$, $7^3 \cdot 6$, …

zatem $s_n = 7^n \cdot 6$, $s_0 = 5$, $s_1 = 6$

3. Znajdź postać zwartą wzoru

$$\begin{cases} s_0 = 5 \\ s_1 = 6 \\ s_{n+2} = 0 \cdot s_{n+1} + (-2) \cdot s_n \end{cases}$$

równanie charakterystyczne (?) $x^2 = 0 \cdot x + (-2)$ NIE!

ciąg ma postać 5, 6, $5\cdot(-2)$, $6\cdot(-2)$, $5\cdot(-2)^2$, $6\cdot(-2)^2$, …
zatem 5, 6, -10, -12, 20, 24, -40, -48, 80, 96, ...

zatem mamy dwa przeplatające się ciągi geometryczne
$5\cdot(-2)^k$, $6\cdot(-2)^k$

Znaczne części tego wykładu pochodzą ze strony [4] oraz z książki **F. Corbalan:** ***Złota proporcja. Matematyczny język piękna. Seria: Świat jest matematyczny. RBA 2012***