Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2017
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

3a/15

Indukcja matematyczna

Zasada Minimum

Dowolny niepusty podzbiór S zbioru liczb naturalnych ma w sobie liczbę najmniejszą.

Zasada Indukcji Matematycznej

Jeśli $Z \subseteq \mathbb{N}$ *jest jakimś zbiorem liczb naturalnych,*

- *w którym jest* k_0*, tzn.* $k_0 \in Z$*,*
- *oraz* Z *wraz z każdą liczbą naturalną* $k \geq k_0$ *zawiera również kolejną liczbę* $k+1$*, tzn.* $\forall k \geq k_0 \;\; k \in Z \Rightarrow \;\; k+1 \in Z$*,*

to wtedy zbiór Z *zawiera wszystkie liczby naturalne* $n \geq k_0$*, tzn.* $Z \supseteq \mathbb{N} - \{0, 1, \ldots, k_0 - 1\}$*.*

Często wygodniej jest zamiast **Indukcji Matematycznej** stosować z pozoru mocniejszą **Zasadę Indukcji Zupełnej**. Tym razem, po to, by wywnioskować, iż $k \in Z$ będziemy mogli skorzystać nie tylko z faktu, że $k\text{-}1 \in Z$, ale ze znacznie mocniejszego założenia, że wszystkie liczby mniejsze niż *k*, tzn. 0, ... *k-1*, są w Z.

Jeśli $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$ *jest jakimś zbiorem liczb naturalnych, który wraz z każdym początkowym fragmentem zbioru N postaci* $\{0, \ldots, k-1\}$ *zawiera również kolejną liczbę k*

(tzn. $\forall k \in \mathbb{N}$ *jeśli* $(\forall l < k \;\; l \in Z)$, *to również k należy do Z),*

to wtedy Z zawiera wszystkie liczby naturalne, tzn. $\mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

Zasada Indukcji Zupełnej (ZIZ) pozwala skorzystać w dowodzie kroku indukcyjnego($k \in Z$) ze znacznie szerszego założenia indukcyjnego, że $l \in Z$dla wszystkich $l < k$ (a nie tylko dla $k - 1$ jak w indukcji matematycznej).

Zwróćmy uwagę, że w Zasadzie Indukcji Zupełnej nie ma wyróżnionego kroku bazowego; jest on ukryty w warunku dla $k = 0$: poprzednik implikacji jest wtedy trywialnie spełniony. Zazwyczaj w dowodach przez indukcję zupełną dowód tego brzegowego warunku (bazowego) jest odrębny.

Przykład

Mamy prostokątną czekoladę złożoną z $n=a \cdot b$ (a, b >0) kwadratowych kawałków, zwanych dalej **kostkami**. Każdy prostokątny fragment czekolady złożony z całych kostek nazywamy **kawałkiem** czekolady.

Przez ułamanie czekolady rozumiemy rozcięcie kawałka czekolady wzdłuż linii pomiędzy kostkami tak, by dostać dwa kawałki. Ile razy trzeba ułamać czekoladę aby rozdzielić jej wszystkie kostki?

Stosując zasadę IZ względem liczby n kostek w czekoladzie udowodnimy, że niezależnie od kolejności cięć potrzeba i wystarcza dokładnie n-1 cięć.

Dowód

- Jeśli czekolada ma tylko 1 kostkę, to nie trzeba niczego dzielić, więc 0 cięć wystarcza.
- Gdy czekolada ma k kostek, to pierwsze jej cięcie podzieli ją na dwa prostokąty o odpowiednio k_0 i k_1 kawałkach, przy czym $k_0 + k_1 = k$ i $k_0, k_1 < k$. Korzystając teraz z założenia indukcyjnego wiemy, że aby połamać te mniejsze kawałki potrzeba i wystarcza odpowiednio $k_0 - 1$ i $k_1 - 1$ cięć. W sumie wykonamy więc $1 + (k_0 - 1) + (k_1 - 1) = (k - 1)$ cięć, co było do udowodnienia.

Zasada Maksimum

Dowolny niepusty i ograniczony od góry podzbiór $S \subseteq \mathbb{N}$ *zbioru liczb naturalnych ma w sobie liczbę największą.*

Następujące zasady są równoważne:

- Zasada Minimum (ZMin),
- Zasada Indukcji Zupełnej (ZIZ),
- Zasada Indukcji Matematycznej (ZIM),
- Zasada Maksimum(ZMax).

Proszę przeczytać dowód tej równoważności w [4].

Przykład

Udowodnij, że liczba $11^n - 4^n$ jest podzielna przez 7 dla wszystkich $n>0$

Dowód

$n=1$ to $11-4=7$ jest podzielne przez 7

jeżeli 11^k-4^k jest podzielna przez 7, to znaczy, że istnieje liczba naturalna p taka, że $11^k-4^k=7p$

weźmy $11^{k+1}-4^{k+1} = 11(11^k-4^k) + 7\cdot 4^k = 11\cdot 7p + 7\cdot 4^k = 7\cdot[11p+4^k]$ czyli też jest podzielne przez 7, a wynikiem dzielenia jest liczba $11p+4^k$

zatem na mocy zasady IM dla wszystkich $n>0$ liczba 11^n-4^n jest podzielna przez 7

Rekurencja

Wzór (przepis) na liczenie silni: „*n*! to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do *n* oraz 0!=1”. Oto wartości silni dla kilku początkowych liczb naturalnych:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	$\cdots$

Można jednak zdefiniować silnię rekurencyjnie:

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_n = n \cdot s_{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Przykłady wadliwe definicji rekurencyjnych

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_n = n \cdot s_{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_n = n \cdot s_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Przykłady poprawne

- ciąg arytmetyczny dla r=2

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_n = s_{n-1} + 2 \quad \text{dla} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

wzór ogólny

$$s_n = 2n.$$

- ciąg geometryczny dla q=2

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_n = 2 \cdot s_{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

wzór ogólny

$$s_n = 2^n.$$

- definicja potęgowania

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a \quad \text{dla } n>0 \end{cases}$$

- definicja sumy skończonej $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 0 \end{cases}$$

- definicja liczby harmonicznej $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ dla $n>0$

$$\begin{cases} H_0 = 0 \\ H_{n+1} = H_n + 1/(n+1) \quad \text{dla } n \geq 0 \end{cases}$$

Wieże Hanoi (E. Lucas, 1883)

U zarania czasu Bóg umieścił 64 złote krążki na jednej z trzech diamentowych iglic (nazwijmy ją A) tak, że krążki wyżej umieszczone miały mniejsze promienie. Następnie Bóg polecił grupie mnichów przełożenie tych krążków na trzecią iglicę (nazwijmy ją C), ale tak by: (1) w jednym ruchu przenosić tylko jeden krążek, (2) krążek większy nigdy nie może leżeć na krążku mniejszym, (3) można posługiwać się iglicą B. Mnisi pracują od zarania dziejów dzień i noc ... Ile czasu im to zajmie?

By obliczyć ilość potrzebnych do wykonania ruchów, przeanalizujmy najpierw małe przypadki:

Łatwo zauważyć, że dla 1 krążka potrzebny jest jeden ruch: $A \to C$

Podobnie dla dwu krążków możemy postąpić: $A \to B,\ \ A \to C,\ \ B \to C$

Przy 3 krążkach postępujemy tak: najpierw przenosimy dwa górne krążki na iglicę B posługując się iglicą C ($A \to C, \quad A \to B, \quad C \to B$), następnie przenosimy największy krążek z A na C ($A \to C$) i przenosimy krążki z B na C posługując się iglicą A ($B \to A, \quad B \to C, \quad A \to C$). To rozumowanie pokazuje, że potrzeba tu 7 ruchów.

Oznaczmy przez H_n (*nie ma to nic wspólnego z liczbą harmoniczną, tylko z „Hanoi”*) liczbę ruchów potrzebnych do przeniesienia *n* krążków z jednej iglicy na drugą. Aby przenieść *n* krążków z A na C możemy postąpić podobnie jak w przypadku 3 krążków:

- przenosimy $n-1$ górnych krążków na iglicę B posługując się iglicą C - potrzeba na to H_{n-1} ruchów
- przenosimy największy krążek z A na C - to tylko jeden ruch
- przenosimy $n-1$ krążków z B na C posługując się iglicą A - znów potrzeba na to H_{n-1} ruchów.

A zatem $H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1} = 2 \cdot H_{n-1} + 1$

Ile wobec tego wynosi H_{64}?

Mamy równanie rekurencyjne

$$\begin{cases} H_1 = 1 \\ H_n = 2 \cdot H_{n-1} + 1 \quad \text{dla} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

bardzo podobne do ciągu geometrycznego.
Możemy policzyć kilka jego wyrazów: $1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127, \ldots$
i rozpoznać w nim ciąg potęg dwójki zmniejszonych o 1.

Ale czy rzeczywiście $H_n = 2^n - 1$?

I znów, aby się upewnić, że nasze odgadnięcie było poprawne, sprawdzamy indukcyjnie, że

$$2 \cdot H_{n-1} + 1 = 2 \cdot \left(2^{n-1} - 1\right) + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} - 2 + 1 = 2^n - 1 = H_n$$

co oznacza, że rzeczywiście ciąg $2^n - 1$ spełnia równanie rekurencyjne, którym zadany jest ciąg H_n.

A wiec $H_{64} = 2^{64} - 1 \approx 100\,000\,000\,000\,000\,000\,000$, co przy przenoszeniu jednego krążka na sekundę zajmie ponad $3\,000\,000\,000\,000$ lat, a przenosząc te krążki "komputerem" 3GHz potrzeba będzie... i tak ponad tysiąc lat!

Przykład

Znajdź postać zwartą zadanego ciągu rozwijając równanie rekurencyjne:

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_{n+1} = a_n^2. \end{cases}$$

Policzmy:

$$a_n = a_{n-1}^2 = a_{n-2}^4 = a_{n-3}^8 = \ldots = a_0^{2^n} = 2^{2^n}.$$

Przykład: Jaka jest największa możliwa liczba l_n obszarów wyznaczonych przez *n* prostych na płaszczyźnie?

Sprawdźmy najpierw kilka pierwszych wartości. Gdy nie ma żadnej prostej obszar jest jeden. Jedna prosta tworzy zawsze dwa różne obszary. Kładąc drugą prostą (byle nie równoległą do pierwszej) otrzymujemy 4 obszary.

W tym momencie możemy pokusić się o zgadywanie i przypuścić, że $l_n = 2^n$. Jednakże dla trzech prostych jest to 7. Zauważmy, że nowa prosta zwiększa ilość obszarów o k jeśli przecina dokładnie $k-1$ z poprzednich prostych i to w nowych punktach przecięć. Z drugiej strony dwie proste mogą się przeciąć w co najwyżej jednym punkcie i przecinają się o ile nie są równolegle. Widzimy zatem, że najwięcej obszarów dostaniemy kładąc kolejne proste w ten sposób aby żadne dwie nie były równoległe i żadne trzy nie przecinały się w jednym punkcie.

Otrzymujemy następujące równanie rekurencyjne:

$$\begin{cases} l_0 = 1 \\ l_n = l_{n-1} + n \quad \text{dla } n>0 \end{cases}$$

Ponownie rozwiążemy równanie rozwijając je:

$$l_n = l_{n-1} + n = l_{n-2} + (n-1) + n = l_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \ldots$$
$$= l_0 + 1 + 2 + \ldots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2},$$

gdzie ostatnia równość wynika z - już udowodnionego - wzoru na sumę kolejnych liczb naturalnych.