Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2017

andrzej.lachwa@uj.edu.pl

2b/15

Indukcja matematyczna

Poprawność indukcji matematycznej wynika z dobrego uporządkowania liczb naturalnych, czyli z następującej **Zasady Minimum**:

> *Dowolny niepusty podzbiór S zbioru liczb naturalnych ma w sobie liczbę najmniejszą.*

Pierwszy, znany dowód używający tej zasady (Maurolio, 1575) pokazał, że suma początkowych *n* liczb nieparzystych wynosi n^2, tzn.:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Aby nie było wątpliwości, jak wygląda wzór dla n=0 lepiej go przedstawić w postaci:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots}_{n \text{ składników}} = n^2$$

Aby pokazać, że wzór jest prawdziwy dla wszystkich liczb naturalnych skorzystamy z Zasady Minimum.

Gdyby rozważana równość nie zachodziła dla wszystkich liczb naturalnych, to zbiór $S = \{n \in \mathbb{N} : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) \neq n^2\}$ byłby niepusty, i zgodnie z Zasadą Minimum miałby liczbę najmniejszą. Oznaczmy ją przez *s (*łatwo sprawdzić, że *s*>5).

Skoro *s* jest najmniejszym kontrprzykładem, to *s*-1 spełnia równość Maurolio, więc: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2s-3) = (s-1)^2$.

Dodając teraz do obu stron równości kolejną liczbę nieparzystą dostajemy

$$1+3+5+\ldots+(2s-3)+(2s-1) = (s-1)^2+(2s-1) = s^2-2s+1+2s-1 = s^2,$$

co oczywiście oznacza, że $s \notin S$. Tym samym *s* nie może być najmniejszą liczbą w zbiorze kontrprzykładów, a więc w ogóle taki kontrprzykład istnieć nie może, i wobec tego wszystkie liczby naturalne spełniają równość Maurolio.

Zasada Indukcji Matematycznej

Jeśli $Z \subseteq \mathbb{N}$ *jest jakimś zbiorem liczb naturalnych,*

- *w którym jest* k_0, *tzn.* $k_0 \in Z$,
- *oraz* Z *wraz z każdą liczbą naturalną* $k \geq k_0$ *zawiera również kolejną liczbę* $k+1$, *tzn.* $\forall k \geq k_0 \quad k \in Z \Rightarrow \quad k+1 \in Z$,

to wtedy zbiór Z *zawiera wszystkie liczby naturalne* $n \geq k_0$, *tzn.* $Z \supseteq \mathbb{N} - \{0, 1, \ldots, k_0 - 1\}$.

Pierwszy warunek nazywamy **bazą indukcji**. W drugim warunku najpierw dokonujemy **założenia indukcyjnego** (o tym, że $k \in Z$), a następnie wykonujemy **krok indukcyjny** dowodząc, że $k+1 \in Z$.

Zasada indukcji matematycznej - inaczej.

Jeżeli

1. istnieje taka liczba naturalna n_0, że $T(n_0)$ jest zdaniem prawdziwym,
2. dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \rightarrow T(n+1)$,

to $T(n)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$.

Zadanie

Dla dowolnej liczby naturalnej *n≥0* zachodzi: $0+1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Wzór wygląda na prawdziwy, bo np. dla $n=2$ mamy $1+2=3$ oraz $\frac{2\cdot(2+1)}{2}=3$, albo dla $n=5$ mamy $1+2+3+4+5=15$ oraz $\frac{5\cdot(5+1)}{2}=15$.

No to spróbujmy udowodnić, że tak jest dla wszystkich liczb naturalnych.

Niech $Z=\left\{n\in\mathbb{N}:0+1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\right\}$.

Mamy wtedy $0\in Z$ bo $0=\frac{0\cdot(0+1)}{2}$, oraz

gdy $k\in Z$, tzn. $0+1+2+\cdots+(k-1)+k=\frac{k(k+1)}{2}$, to

$$
\begin{aligned}
0+1+2+\cdots+k+(k+1) &= [0+1+2+\cdots+k] + (k+1) \\
&= \left[\frac{k(k+1)}{2}\right] + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}
\end{aligned}
$$

co oznacza, że $k+1 \in Z$. A stąd już możemy wnosić, że $\mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

Zadanie

Niech $Z = \left\{ n \in \mathbb{N} : 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}$.

Jeśli pokażemy, że $Z = \mathbb{N}$, to dostaniemy ważny wzór na sumę kolejnych kwadratów.

Oczywiście $0 \in Z$.

Nadto, gdy $k \in Z$, to aby stwierdzić czy $k+1$ jest w Z

rozważamy sumę:

$$
\begin{aligned}
0^2+1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 &= \left[0^2+1^2+2^2+\cdots+k^2\right] + (k+1)^2 \\
&= \left[\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right] + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)[2k^2+7k+6]}{6} \\
&= \frac{(k+1)[(k+2)(2k+3)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}
\end{aligned}
$$

co świadczy o tym, że $k+1 \in Z$. A zatem $Z = \mathbb{N}$.

Ilustracją indukcji matematycznej jest efekt domina.

Załóżmy, że ułożyliśmy bardzo dużo kostek domina, jedna za drugą. Upewniliśmy się też, że jeśli przewróci się dowolna z nich (założenie indukcyjne) to przewróci się też następna (krok indukcyjny).

Wtedy, jeśli ktoś nam powie, że przewrócił czwartą kostkę (baza indukcji) to wiemy, iż wszystkie następne (poza być może pierwszymi trzema) też się przewróciły.

W indukcji matematycznej liczby naturalne są niejako kostkami domina ułożonymi dostatecznie blisko siebie.

Przykład

Sprawdźmy, czy funkcja $n \mapsto n^2$ rośnie wolniej niż $n \mapsto 2^n$?

Dla początkowych wartości mamy

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	...
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	...

Aby się przekonać, że w istocie $n^2 < 2^n$ dla $n \geq 5$ przeprowadźmy dowód indukcyjny.

Lemat: $2n + 1 < 2^n$ (dla dowolnego $n \geq 3$)

Dowód indukcyjny lematu:

$2 \cdot 3 + 1 = 7 < 8 = 2^3$ oraz niech wzór prawdziwy dla liczby $k \geq 3$

wtedy $2(k+1)+1 = 2k+3 = (2k+1)+2 < 2^k+2 < 2^k+2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

z założenia indukcyjnego

Zatem wzór prawdziwy dla wszystkich $n \geq 3$.

DOWÓD

$5^2 = 25 < 32 = 2^5$ oraz

niech dla liczby $k>5$ zachodzi $k^2<2^k$, wtedy

$(k+1)^2 = k^2 + (2k+1) < 2^k+2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

z lematu i z założenia indukcyjnego

Zatem na mocy zasady IM wzór prawdziwy dla wszystkich $n>5$.

Przykład (nierówność Bernoulliego)

Udowodnimy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \geq -1$ oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $(1+a)^n \geq 1+na$.

- baza: $(1+a)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot a$,
- z założenia indukcyjnego $(1+a)^k \geq 1+ka$, poprzez wymnożenie stronami przez nieujemną liczbę rzeczywistą $1+a$, dostajemy

$$\begin{aligned} (1+a)^{k+1} &= (1+a)^k(1+a) \\ &\geqslant (1+ka)(1+a) \\ &= 1+a+ka+ka^2 \\ &\geqslant 1+(k+1)a. \end{aligned}$$

Zatem na mocy zasady IM wzór prawdziwy dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Przykład

Pokażemy, że o ile tylko $n \geq 2$, to liczba postaci 2^{2^n} ma na końcu w zapisie dziesiętnym cyfrę 6. Oznacza to, że $2^{2^n} = 10x + 6$ dla pewnej liczby naturalnej x.

Dowód

- Dla $n = 2$ mamy $2^{2^2} = 16 = 10 \cdot 1 + 6$,
- Nadto, gdy $2^{2^n} = 10x + 6$, to

$$2^{2^{n+1}} = 2^{2^n \cdot 2} = \left(2^{2^n}\right)^2 = (10x+6)^2 = 100x^2 + 120x + 36 =$$
$$10\left(10x^2 + 12x + 3\right) + 6.$$

Na mocy zasady IM własność prawdziwa dla wszystkich *n*≥2.

Przykład (n-ta liczba harmoniczna)

$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$ i przyjmuje się, że $H_0 = 0$.

Nazwa liczby harmonicznych wzięła się stąd, że możliwe do uzyskania na strunie długości fali stojącej są proporcjonalne kolejno do $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots$.

Oto wartości kilku pierwszych liczb harmonicznych:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
H_n	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{761}{280}$

Szereg harmoniczny jest rozbieżny do nieskończoności (dowód tego faktu pochodzi ze Średniowiecza) i opiera się na zastąpieniu kolejnych sum częściowych (liczących 2, 4, 8 … składników) ułamkami 1/2. Ponieważ suma liczb w każdej kolejnej sumie częściowej wynosi 1/2, ciąg sum częściowych szeregu nie ma granicy skończonej.

Liczby harmoniczne osiągają dowolnie duże wartości, choć rosną dość wolno (tak wolno jak lg *n*).

Twierdzenie

$\frac{\lfloor \lg n \rfloor + 1}{2} \leq H_n \leq \lceil \lg n \rceil + 1$ dla $n \geq 1$.

Lemat

$\frac{n+1}{2} \leq H_{2^n} \leq n+1$, dla $n \geq 0$.

Dowód lematu

- dla $n=0$ mamy $\frac{0+1}{2} \leq H_1 \leq 0+1$, bo $H_1=1$.
- Zakładamy, ża dla dowolnie wybranej liczby *k* mamy $\frac{k+1}{2} \leq H_{2^k} \leq k+1$,

a wtedy

$$
\begin{aligned}
H_{2^{k+1}} &= H_{2^k} + \overbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}}^{2^k \text{ składników}} \le k + 1 + 2^k \frac{1}{2^k} \\
&= k + 2.
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
H_{2^{k+1}} &= H_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} \ge \frac{k+1}{2} + 2^k \frac{1}{2^{k+1}} \\
&= \frac{k+2}{2}.
\end{aligned}
$$

DOWÓD

Niech $\lfloor \lg n \rfloor = k$. Wtedy $2^k \le n < 2^{k+1}$ więc $H_{2k} \le H_n < H_{2k+1}$.

Zatem $\frac{k+1}{2} \le H_{2k} \le H_n < H_{2k+1} \le (k+1)+1$, czyli $\frac{\lfloor \lg n \rfloor + 1}{2} \le H_n \le \lceil \lg n \rceil + 1$

Przykłady oszacowań

H_{31}= 4,0272...
lg(31)=4,954...

oszacowanie $2{,}5 \leq 4{,}0272... \leq 6$

H_{32}= 4,0584...
lg(32)=5

oszacowanie $3 \leq 4{,}0272... \leq 6$

Przykład

*Proponujemy teraz przeanalizować przykład **błędnego** rozumowania indukcyjnego ZIM. Ćwiczenie to zaproponował George Polya, wybitny węgierski matematyk. Udowodnimy, że wszystkie konie są jednej maści!*

Posłużymy się indukcją względem liczby koni.

- Dowolny zbiór złożony z jednego konia jest zbiorem koni o jednej maści.
- Rozpatrzmy dowolny k+1-elementowy zbiór koni. Wybierzmy dowolnego konia z tego zbioru i usuńmy go na chwilę. Na mocy założenia indukcyjnego k-elementowy zbiór pozostałych koni jest zbiorem koni o tej samej maści. Dodajmy z powrotem usuniętego konia i usuńmy dowolnego innego. Znów mamy k-elementowy zbiór koni, a więc są to konie tej samej maści. Ponadto usunięty koń był tej samej maści co większość koni w obecnym zbiorze. To oznacza, że wszystkie rozpatrywane k+1 konie są jednej maści.