Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2019
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

8B/14

Sumy nieoznaczone i oznaczone

W rachunku różniczkowym operatorem odwrotnym do pochodnej jest całka:

$g = Df$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\int g(x)dx = f(x) + C.$

W rachunku różnicowym operatorem takim jest **suma nieoznaczona**:

$g = \Delta f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum g(x)\delta x = f(x) + C.$

gdzie *C* jest stałą rachunku różnicowego, czyli funkcją taką, że $C(x+1)=C(x)$. W dziedzinie rzeczywistej jest to funkcja okresowa, a w dziedzinie całkowitej jest to funkcja stała.

Tak więc $\sum g(x)\delta x$ jest klasą funkcji których różnica równa jest $g(x)$.

WŁASNOŚCI SUMY NIEOZNACZONEJ

Dla funkcji $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz $c \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$\sum c \cdot g(x)\delta x = c \cdot \sum g(x)\delta x,$$

$$\sum (f(x) + g(x))\delta x = \sum f(x)\delta x + \sum g(x)\delta x,$$

$$\sum x^{\underline{m}}\delta x = \frac{1}{m+1}x^{\underline{m+1}},$$ dla $m \geqslant 0$.

Suma oznaczona funkcji $g(x)$ o parametrach $a, b \in \mathbb{N}$ to

$$\sum_a^b g(x)\delta x = f(b) - f(a),$$ dla funkcji f z klasy $\sum g(x)\delta x$,

tzn. takiej, że $g = \Delta f$, czyli $g(x) = f(x+1) - f(x)$.

Zauważmy, ze definicja ta jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru funkcji *f*, jako że stała, o którą dwie takie funkcje się różnią, zniesie się przy odejmowaniu.

Dla dowolnych całkowitych *a*, *b*, *c* zachodzi:

$$\sum_a^a g(x)\delta x = 0,$$

$$\sum_a^{a+1} g(x)\delta x = g(a),$$

$$\sum_a^b g(x)\delta x = -\sum_b^a g(x)\delta x,$$

$$\sum_a^b g(x)\delta x + \sum_b^c g(x)\delta x = \sum_a^c g(x)\delta x,$$

$$\sum_a^b g(x)\delta x = \sum_{a \le i < b} g(i),$$ o ile tylko $a \le b$.

Rachunek różnicowy w liczeniu sum skończonych

Zobaczymy, jak rachunek różnicowy może być pomocny w obliczaniu sum skończonych.

Suma $\sum_{a \le i < b} g(i)$ to dokładnie $f(b) - f(a)$, gdzie f jest sumą nieoznaczoną funkcji g, tzn. $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Dla obliczenia sumy skończonej wystarczy więc wyliczyć sumę nieoznaczoną, a następnie różnicę.

Proces ten jest bardzo podobny do liczenia całek nieoznaczonych.

Przykład 1

Dla policzenia sumy dolnych silni $\sum_{i=0}^{n} i^{\underline{2}}$ odnotujmy najpierw, że skoro $\Delta x^{\underline{3}} = 3x^{\underline{2}}$, to $\sum x^{\underline{2}} \delta x = \frac{x^{\underline{3}}}{3} + C$.

Teraz już oczywiście $\sum_{i=0}^{n} i^{\underline{2}} = \sum_{0}^{n+1} x^{\underline{2}} \delta x = \frac{(n+1)^{\underline{3}}}{3} - \frac{0^{\underline{3}}}{3} = \frac{(n+1)^{\underline{3}}}{3}$.

Przykład 2

Dla policzenia sumy $\sum_{i=0}^{n} i^{\underline{k}}$, gdzie $k \geq 0$, wykorzystujemy fakt, iż $\Delta x^{\underline{k+1}} = (k+1)x^{\underline{k}}$ i dostajemy

$$\sum_{i=0}^{n} i^{\underline{k}} = \sum_{0}^{n+1} x^{\underline{k}} \delta x = \frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}.$$

Przykład 3

Dla policzenia sumy sześcianów $\sum_{i=0}^{n} i^3$ potrzebujemy najpierw znaleźć sumę nieoznaczoną $\sum x^3 \delta x$. W tym celu wykorzystujemy twierdzenie o przekształcaniu wielomianów do przedstawienia wielomianu x^3 jako kombinacji liniowej dolnych silni, dla których znamy już sumy nieoznaczone. Liczymy więc współczynniki typu $\frac{(\Delta^i x^3)(0)}{i!}$:

x	0	1	2	3	4	...
x^3	0	1	8	27	64	...
Δx^3	1	7	19	37	...	
$\Delta^2 x^3$	6	12	18	...		
$\Delta^3 x^3$	6	6	...			

skąd $x^3 = \frac{6}{3!} x^{\underline{3}} + \frac{6}{2!} x^{\underline{2}} + \frac{1}{1!} x^{\underline{1}} + 0 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$, a zatem

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \sum_{0}^{n+1} x^3 \delta x = \sum_{0}^{n+1} (x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}) \delta x = \frac{(n+1)^{\underline{4}}}{4} + (n+1)^{\underline{3}} + \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2}.$$

Uwalniając się teraz od dolnych silni dostajemy, że to ostatnie wyrażenie

wynosi $\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)+4(n+1)n(n-1)+2(n+1)n}{4} = \dfrac{(n+1)^2 n^2}{4}.$

<u>Rozszerzymy teraz pojęcie dolnej silni</u> na ujemne wykładniki kładąc:

$$x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)},$$ dla $m > 0$.

Prawa dla dolnej silni, które odnotowaliśmy dla wykładników naturalnych są zachowane. W szczególności mamy dla dowolnych $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}},$$

$$\Delta x^{\underline{m}} = m \cdot x^{\underline{m-1}},$$

a zatem

➔ $$\sum x^{\underline{m}} \delta x = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1} + C,$$ dla $m \neq -1$.

Policzmy dla $m < -1$: $\Delta x^{\underline{m}} = (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} =$

$= 1 / [(x+2)\cdot(x+3)\ldots(x+1-m)] - 1 / [(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots(x-m)] =$

$$= (x+1-x-1+m) / [(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot(x-m+1)] = m\cdot x^{\underline{m-1}}$$

Na koniec zajmiemy się przypadkiem, którego nie potrafimy jeszcze sumować, tzn. wyrażeniem $\sum x^{\underline{-1}}\delta x$. Oczywiście $x^{\underline{-1}}$ to $\frac{1}{x+1}$.

Widzieliśmy, że suma postaci $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}$ to $(n+1)$-sza liczba harmoniczna H_{n+1} oraz że zachowuje się podobnie do logarytmu:

$$\frac{\lfloor \lg n \rfloor + 1}{2} \le H_n \le \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

Z rachunku całkowego wiemy natomiast, że $\int x^{-1}dx = \ln x + C$. Następna obserwacja pokazuje, że podobieństwo to nie jest przypadkowe.

$\Delta H_x = x^{\underline{-1}}$ oraz $\sum x^{\underline{-1}}\delta x = H_x + C$.

Mamy

$$\Delta H_x = \Delta(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{x}) = (1+\ldots+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x+1})-(1+\ldots+\tfrac{1}{x}) = \tfrac{1}{x+1} = x^{\underline{-1}},$$

skąd natychmiast

$\Rightarrow$ $\sum x^{\underline{-1}}\delta x = H_x + C$.

Z kolei dyskretnym odpowiednikiem funkcji wykładniczej e^x, która nie zmienia się przy różniczkowaniu, jest funkcja 2^x:

Dla liczby rzeczywistej $c \neq 1$ mamy

$\Delta c^x = (c-1)c^x$ oraz $\sum c^x \delta x = \frac{c^x}{c-1} + C$.

W szczególności $\Delta 2^x = 2^x$ więc

➔ $\sum 2^x \delta x = 2^x + C$.

Przykład 4

Używając rachunku różnicowego policzymy teraz sumę skończonego ciągu geometrycznego $a_n = a \cdot q^n$ dla $n \geqslant 0$ ($q \neq 1$), tj. sumę $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a \cdot q^i$ dla $n > 0$.

Uwaga: $S_1 = a_0 = a \cdot q^0 = a$, $S_2 = a_0 + a_1 = a + a \cdot q^1$, $S_3 = a_0 + a_1 + a_2 = a + a \cdot q^1 + a \cdot q^2$, ...

Liczymy

$$\sum a q^x \delta x = a \sum q^x \delta x = a \frac{q^x}{q-1} + C.$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a \cdot q^i = a \cdot \sum_0^n q^x \delta x = a \cdot \left(\frac{q^n}{q-1} - \frac{q^0}{q-1} \right) = a \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

Sumowanie przez części

Poprzez analogię do rachunku różnicowego zastosujmy operator różnicowy do iloczynu funkcji

$$\begin{aligned}\Delta(f(x)g(x)) &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) \\ &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x+1) + f(x)g(x+1) - f(x)g(x) \\ &= g(x+1)\Delta f + f(x)\Delta g(x).\end{aligned}$$

Dostajemy stąd natychmiast następującą regułę sumowania przez części

$$\sum f(x)\cdot\Delta g(x)\delta x = f(x)\cdot g(x) - \sum(\Delta f)(x)\cdot g(x+1)\delta x.$$

Przykład 5

Dla policzenia sumy $\sum_{i=0}^{n} i2^i$, wyznaczamy najpierw (przez części) sumę nieoznaczoną $\sum (x2^x)\delta x$. Jest to łatwe, jako że $2^x = \Delta 2^x$, więc

$$\begin{aligned}\sum (x2^x)\delta x &= x2^x - \sum ((\Delta x)2^{x+1})\delta x \\ &= x2^x - \sum (1 \cdot 2^{x+1})\delta x \\ &= x2^x - 2^{x+1} + C = (x-2)2^x + C.\end{aligned}$$

Teraz mamy już

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = \sum_{0}^{n+1} x2^x \delta x = (n+1-2)2^{n+1} - (0-2)2^0 = (n-1)2^{n+1} - 2.$$