Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2019
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

8A/14

Rachunek różnicowy

Dobrym narzędziem do obliczania skończonych sum jest rachunek różnicowy. W rachunku tym odpowiednikiem operatora pochodnej jest **operator różnicowy** Δ, zdefiniowany dla dowolnej funkcji rzeczywistej *f* jako $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$.

Operator ten będziemy jednak rozważać tylko dla funkcji określonych na zbiorze liczb naturalnych (czyli dla ciągów).

Rozważając funkcję liczb naturalnych *f* nie mamy możliwości badać granicy występującej w definicji pochodnej; w zamian za to rozważamy stosowny iloraz $\frac{f(x+1)-f(x)}{1}$ przy najmniejszej możliwej wartości przyrostu *x*, czyli wartości 1.

Przykłady działania operatora różnicowego

- Dla funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 10$ mamy

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x) = (x+1)^2 - 4(x+1) + 10 - (x^2 - 4x + 10)$$
$$= 2x - 3.$$

- Niech $f(x) = (x!)^2$ dla $x \in N$

$(\Delta f)(x) = \Delta(x!)^2 = [(x+1)!]^2 - (x!)^2 = (x!)^2 \cdot ((x+1)^2 - 1)) = (x!)^2 \cdot (x^2 + 2x)$

- Niech $f(x) = a^x$ dla $x \in N$

$\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = a^x(a-1)$

- Niech $f(x) = x^3$ dla $x \in N$

$\Delta x^3 = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$

Operator Δ^n nazywamy n-tą iteracją operatora różnicowego Δ, gdzie

$$\Delta^0 f = f,$$

$$\Delta^{k+1} f = \Delta(\Delta^k f).$$

Przykład

Dla funkcji $f(x) = \sum_{i=0}^{x} i^2$ mamy:

- $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x) = \sum_{i=0}^{x+1} i^2 - \sum_{i=0}^{x} i^2 = (x+1)^2,$
- $(\Delta^2 f)(x) = (\Delta f)(x+1) - (\Delta f)(x) = (x+2)^2 - (x+1)^2 = 2x+3,$
- $(\Delta^3 f)(x) = (\Delta^2 f)(x+1) - (\Delta^2 f)(x) = 2(x+1)+3 - 2x - 3 = 2,$
- $(\Delta^4 f)(x) = (\Delta^3 f)(x+1) - (\Delta^3 f)(x) = 2 - 2 = 0.$

Przykład obliczania wartości różnic dla funkcji $f(x) = \sum_{i=0}^{x} i^2$ dla dwóch wartości dziedziny (dla 0 i dla 1) i dla czterech iteracji:

x	0	1	2	3	4	5	...
$f(x)$	0	1	5	14	30	55	...
$(\Delta f)(x)$	1	4	9	16	25	...	
$(\Delta^2 f)(x)$	3	5	7	9	...		
$(\Delta^3 f)(x)$	2	2	2	...			
$(\Delta^4 f)(x)$	0	0	...				

Twierdzenie

Operator różnicowy Δ jest operatorem liniowym,

tzn.:

$$\Delta(c \cdot f) = c \cdot \Delta f,$$
$$\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g.$$

Przykład

Weźmy wcześniej rozważaną funkcję $f(x) = x^2 - 4x + 10$.

$(\Delta f)(x) = \Delta(x^2 - 4x + 1) = \Delta(x^2) - 4\Delta(x) + \Delta(10) =$

$= (x+1)^2 - x^2 - 4 + 0 = 2x + 1 - 4 = 2x - 3$

Różniczkowanie jednomianów, czyli wielomianów typu x^k, jest bardzo proste: $Dx^k = kx^{k-1}$ dla dowolnego $k \geqslant 1$. Własność ta nie przenosi się jednak na operator Δ:

$$Dx^2 = 2x,$$

$$\Delta x^2 = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1,$$

$$Dx^3 = 3x^2,$$

$$\Delta x^3 = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1,$$

Dla operatora różnicowego Δ odpowiednikiem wielomianu jest *m*-ta dolna silnia *x* (*m*-ta potęga ubywająca, *m*-ta potęga krocząca), czyli wielomian zmiennej *x*, zdefiniowany jako

$$x^{\underline{m}} = x(x-1)\ldots(x-m+1), \quad \text{dla} \quad m \geq 1$$

oraz *m*-ta górna silnia *x* (*m*-ta potęga przybywająca), czyli wielomian zmiennej *x*, zdefiniowany jako

$$x^{\overline{m}} = x(x+1)\ldots(x+m-1), \quad \text{dla} \quad m \geq 1.$$

Dodatkowo przyjmujemy, że $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$.

Zauważmy, że w odróżnieniu od zwykłego potęgowania mamy tu

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}} = (x-n)^{\underline{m}}x^{\underline{n}}.$$

Twierdzenie

Dla $m \geq 1$ zachodzi $\Delta x^{\underline{m}} = m x^{\underline{m-1}}$. Policzmy:

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{m}} &= (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} \\
&= (x+1)x(x-1)\ldots(x-m+2) - x(x-1)\ldots(x-m+1) \\
&= mx(x-1)\ldots(x-m+2) \\
&= mx^{\underline{m-1}}.
\end{aligned}$$

Dla m=0 mamy $\Delta(x^{\underline{0}}) = (x+1)^{\underline{0}} - x^{\underline{0}} = 1 - 1 = 0 = 0 \cdot x^{\underline{-1}}$.

Dla m<0 wyprowadzimy ten wzór później.

Wniosek

$$\Delta \left(\sum_{m=1 \ldots k} a_m x^{\underline{m}}\right) = \sum_{m=1 \ldots k} a_m \Delta x^{\underline{m}} = \sum_{m=1 \ldots k} a_m \cdot m \cdot x^{\underline{m-1}}$$

Przykłady

$\Delta 2^x = 2^{x+1} - 2^x = 2^x(2-1) = 2^x$

$f(x)=H_x$ (funkcja harmoniczna)

$\Delta H_x = H_{x+1} - H_x = \sum_{k=1..x+1} ({}^1/_k) - \sum_{k=1..x} ({}^1/_k) = {}^1/_{(x+1)} = \ldots$

$x^{\underline{2}} = x(x-1)$

$x^{\underline{1}} = x$

$x^{\underline{0}} = 1$

$x^{\underline{-1}} = {}^1/_{(x+1)}$

$x^{\underline{-2}} = {}^1/_{(x+1)\cdot(x+2)}$

$x^{\underline{-m}} = {}^1/_{(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ \ldots\ \cdot(x+m)}$

$\ldots = x^{\underline{-1}}$.

Twierdzenie o przekształceniu wielomianu

Dowolny wielomian *k*-tego stopnia *p*(*x*) można jednoznacznie przedstawić w postaci $\sum_{i=0..k} a_i x^{\underline{i}}$, gdzie $a_0 = p(0)$, $a_1 = (\Delta p)(0)$, $a_2 = (\Delta^2 p)(0)/2$

i ogólnie

$$p(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(\Delta^i p)(0)}{i!} x^{\underline{i}}.$$

Twierdzenie to jest analogią Twierdzenia Taylora dla wielomianów. Dowód pomijamy w tym wykładzie. Korzysta on z faktu, iż ciąg dolnych silni jest bazą przestrzeni liniowej wielomianów.

Wykorzystując powyższe twierdzenie możemy szybko różnicować dowolny wielomian $p(x)$ licząc jedynie kolejne różnice $(\Delta^i p)(0)$.

To z kolei dla wielomianu stopnia k sprowadza się do policzenia $k+2$ wartości początkowych $p(0), \ldots, p(k+1)$.

Przykład

Aby policzyć $\Delta p(x)$, dla $p(x) = x^3 - 5x + 13$, najpierw wyrażamy nasz wielomian jako kombinację dolnych silni. Do tego potrzebujemy współczynników:

n	0	1	2	3	4	...
$p(n)$	13	9	11	25	57	
$\Delta p(n)$	-4	2	14	32		
$\Delta^2 p(n)$	6	12	18			
$\Delta^3 p(n)$	6	6				
$\Delta^4 p(n)$	0					

Teraz korzystamy z twierdzenia o przekształceniu wielomianu:

$p(n) = n^3 - 5n + 13 = (6/3!)n^{\underline{3}} + (6/2!)n^{\underline{2}} + (-4/1!)n^{\underline{1}} + (13/0!)n^{\underline{0}} =$

$= n^{\underline{3}} + 3n^{\underline{2}} - 4n^{\underline{1}} + 13$

i różnicujemy korzystając z twierdzenia o różnicy potęgi dolnej:

$\Delta p(n) = \Delta(n^{\underline{3}} + 3n^{\underline{2}} - 4n^{\underline{1}} + 13) = 3n^{\underline{2}} + 6n^{\underline{1}} - 4$

Twierdzenie o różnicowaniu iloczynu ciągów

$\Delta(f\cdot g) = f\cdot\Delta g + \nabla g\cdot\Delta f$ gdzie $\nabla g(x)=g(x+1)$ zwana operatorem przesunięcia
Z uwagi na przemienność mnożenia jest również: $\Delta(f\cdot g) = g\cdot\Delta f + \nabla f\cdot\Delta g$.

Przykład

$$\begin{aligned}
\Delta\,(3^x\cdot(x^{\underline{2}}+1)) &= (x^{\underline{2}}+1)\cdot\Delta 3^x + 3^{x+1}\cdot\Delta(x^{\underline{2}}+1) = \\
&= (x^{\underline{2}}+1)\cdot(3^{x+1} - 3^x) + 3^{x+1}\cdot((x+1)^{\underline{2}}+1 - (x^{\underline{2}}+1)) = \\
&= (x(x-1)+1)\cdot 3^x\cdot(3-1) + 3\cdot 3^x\cdot((x+1)x+1 - (x(x-1)+1)) = \\
&= 2(x^2-x+1)\cdot 3^x + 3\cdot 3^x\cdot(x^2+x+1 - (x^2-x+1)) = \\
&= 3^x\cdot 2\cdot(x^2-x+1) + 3^x\cdot 3\cdot(2x) = \\
&= 3^x\cdot(2x^2+4x+2)
\end{aligned}$$