Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2019
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

5/14

Rekurencja

Wzór (przepis) na liczenie silni: „*n*! to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do *n* oraz 0!=1”. Oto wartości silni dla kilku początkowych liczb naturalnych:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	$\cdots$

Można jednak zdefiniować silnię rekurencyjnie:

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_n = n \cdot s_{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Przykłady wadliwe definicji rekurencyjnych

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_n = n \cdot s_{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_n = n \cdot s_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Przykłady poprawne

- ciąg arytmetyczny dla r=2

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_n = s_{n-1} + 2 \quad \text{dla} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

wzór ogólny

$$s_n = 2n.$$

- ciąg geometryczny dla q=2

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_n = 2 \cdot s_{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

wzór ogólny

$$s_n = 2^n.$$

- definicja potęgowania

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a \quad \text{dla } n>0 \end{cases}$$

- definicja sumy skończonej $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 0 \end{cases}$$

- definicja liczby harmonicznej $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ dla $n>0$

$$\begin{cases} H_0 = 0 \\ H_{n+1} = H_n + 1/(n+1) \quad \text{dla } n \geq 0 \end{cases}$$

Wieże Hanoi (E. Lucas, 1883)

U zarania czasu Bóg umieścił 64 złote krążki na jednej z trzech diamentowych iglic (nazwijmy ją A) tak, że krążki wyżej umieszczone miały mniejsze promienie. Następnie Bóg polecił grupie mnichów przełożenie tych krążków na trzecią iglicę (nazwijmy ją C), ale tak by: (1) w jednym ruchu przenosić tylko jeden krążek, (2) krążek większy nigdy nie może leżeć na krążku mniejszym, (3) można posługiwać się iglicą B. Mnisi pracują od zarania dziejów dzień i noc ... Ile czasu im to zajmie?

By obliczyć ilość potrzebnych do wykonania ruchów, przeanalizujmy najpierw małe przypadki:

Łatwo zauważyć, że dla 1 krążka potrzebny jest jeden ruch: $A \to C$

Podobnie dla dwu krążków możemy postąpić: $A \to B, \;\; A \to C, \;\; B \to C$

Przy 3 krążkach postępujemy tak: najpierw przenosimy dwa górne krążki na iglicę B posługując się iglicą C ($A \to C, \;\; A \to B, \;\; C \to B$), następnie przenosimy największy krążek z A na C ($A \to C$) i przenosimy krążki z B na C posługując się iglicą A ($B \to A, \;\; B \to C, \;\; A \to C$). To rozumowanie pokazuje, że potrzeba tu 7 ruchów.

Oznaczmy przez H_n (*nie ma to nic wspólnego z liczbą harmoniczną, tylko z „Hanoi"*) liczbę ruchów potrzebnych do przeniesienia *n* krążków z jednej iglicy na drugą. Aby przenieść *n* krążków z A na C możemy postąpić podobnie jak w przypadku 3 krążków:
- przenosimy $n-1$ górnych krążków na iglicę B posługując się iglicą C - potrzeba na to H_{n-1} ruchów
- przenosimy największy krążek z A na C - to tylko jeden ruch
- przenosimy $n-1$ krążków z B na C posługując się iglicą A - znów potrzeba na to H_{n-1} ruchów.

A zatem $H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1} = 2 \cdot H_{n-1} + 1$

Ile wobec tego wynosi H_{64}?

Mamy równanie rekurencyjne

$$\begin{cases} H_1 = 1 \\ H_n = 2 \cdot H_{n-1} + 1 \quad \text{dla} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

bardzo podobne do ciągu geometrycznego.
Możemy policzyć kilka jego wyrazów: $1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127, \ldots$
i rozpoznać w nim ciąg potęg dwójki zmniejszonych o 1.

Ale czy rzeczywiście $H_n = 2^n - 1$?

I znów, aby się upewnić, że nasze odgadnięcie było poprawne, sprawdzamy indukcyjnie, że

$$2 \cdot H_{n-1} + 1 = 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} - 2 + 1 = 2^n - 1 = H_n$$

co oznacza, że rzeczywiście ciąg $2^n - 1$ spełnia równanie rekurencyjne, którym zadany jest ciąg H_n.

A wiec $H_{64} = 2^{64} - 1 \approx 100\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$, co przy przenoszeniu jednego krążka na sekundę zajmie ponad $3\ 000\ 000\ 000\ 000$ lat, a przenosząc te krążki "komputerem" 3GHz potrzeba będzie... i tak ponad tysiąc lat!

Przykład

Znajdź postać zwartą zadanego ciągu rozwijając równanie rekurencyjne:

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_{n+1} = a_n^2. \end{cases}$$

Policzmy:

$$a_n = a_{n-1}^2 = a_{n-2}^4 = a_{n-3}^8 = \ldots = a_0^{2^n} = 2^{2^n}.$$

Przykład: Jaka jest największa możliwa liczba l_n obszarów wyznaczonych przez *n* prostych na płaszczyźnie?

Sprawdźmy najpierw kilka pierwszych wartości. Gdy nie ma żadnej prostej obszar jest jeden. Jedna prosta tworzy zawsze dwa różne obszary. Kładąc drugą prostą (byle nie równoległą do pierwszej) otrzymujemy 4 obszary.

W tym momencie możemy pokusić się o zgadywanie i przypuścić, że $l_n = 2^n$. Jednakże dla trzech prostych jest to 7. Zauważmy, że nowa prosta zwiększa ilość obszarów o k jeśli przecina dokładnie $k-1$ z poprzednich prostych i to w nowych punktach przecięć. Z drugiej strony dwie proste mogą się przeciąć w co najwyżej jednym punkcie i przecinają się o ile nie są równolegle. Widzimy zatem, że najwięcej obszarów dostaniemy kładąc kolejne proste w ten sposób aby żadne dwie nie były równoległe i żadne trzy nie przecinały się w jednym punkcie.

Otrzymujemy następujące równanie rekurencyjne:

$$\begin{cases} l_0 = 1 \\ l_n = l_{n-1}+n \quad \text{dla } n>0 \end{cases}$$

Ponownie rozwiążemy równanie rozwijając je:

$$l_n = l_{n-1} + n = l_{n-2} + (n-1) + n = l_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \ldots$$
$$= l_0 + 1 + 2 + \ldots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2},$$

gdzie ostatnia równość wynika z - już udowodnionego - wzoru na sumę kolejnych liczb naturalnych.

Liczby Fibonacciego

Spośród ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie, jednym z najsłynniejszych jest ciąg Fibonacciego (z roku 1202) zadany przez

$$\begin{cases} f_0 = 0, \\ f_1 = 1, \\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1}. \end{cases}$$

Wszystkie wyrazy ciągu, oprócz pierwszych dwu, są sumą dwu poprzednich elementów. Oto kilka pierwszych wartości ciągu Fibonacciego:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Jak odgadnąć wzór na ogólny wyraz ciągu? Nie jest to proste. Czekano na to 600 lat!

Własność ilorazu

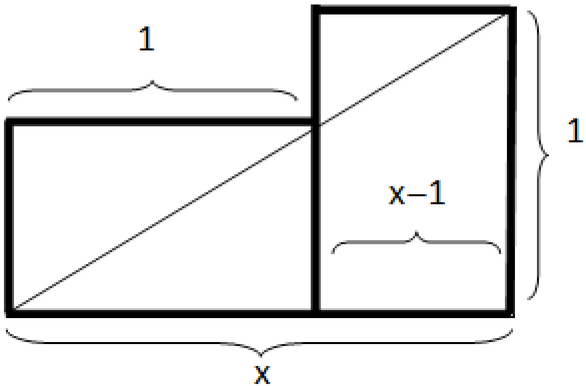
Iloraz dowolnego elementu ciągu Fibonacciego i jego poprzednika jest ze wzrostem wskaźnika coraz lepszym przybliżeniem „boskiej liczby” Φ. Przy 14 elemencie przybliżenie daje już dokładność 14 miejsc dziesiętnych. Liczba Φ, określająca tzw. złotą proporcję, odkryta została w starożytnej Grecji, a udokumentowana przez Euklidesa (300 pne).

Złota liczba

$\Phi = 1{,}618\ 033\ 988\ 7\ldots$

Liczba x jest złotą liczbą, gdy

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$



Równanie $x^2 - x - 1 = 0$ ma dwa rozwiązania, z których jedno jest dodatnie i wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. I to jest właśnie złota liczba $\Phi = 1{,}618\ \ldots$

Potęgowanie liczby Φ

$\Phi^2 = \Phi + 1$ (bo można to przekształcić do $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$)

$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = (\Phi + 1) + \Phi = 2\Phi + 1$

$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = (2\Phi + 1) + (\Phi + 1) = 3\Phi + 2$

. . .

$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = f_n \cdot \Phi + f_{n-1}$ gdzie f_n to elementy ciągu Fibonacciego

Odwrotność liczby Φ

$1/\Phi = \Phi - 1$

Suma początkowych liczb Fibonacciego

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = 1+1+2+3+5+\ldots+f_n = f_{n+2}-1$$ (dowód indukcyjny)

Przykład

$$a_{25} + \ldots + a_{40} = a_{42}-1-(a_{26}-1) = a_{42}-a_{26}$$

Trójki pitagorejskie

Trójką pitagorejską nazywamy trzy liczby naturalne spełniające równanie twierdzenia Pitagorasa: $a^2+b^2=c^2$. Pierwszą taką trójką jest 3, 4, 5.

Większe trójki można konstruować wykorzystując dowolne cztery kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego. Trójkę utworzą: (1) iloczyn dwóch skrajnych wyrazów, (2) podwojony iloczyn dwóch środkowych wyrazów i (3) suma kwadratów dwóch środkowych wyrazów.

Np. 2, 3, 5, 8; $2 \cdot 8=16$, $2 \cdot 3 \cdot 5=30$, $3 \cdot 3+5 \cdot 5=34$; $16^2+30^2=256+900=1156=34^2$

Twierdzenie Fermata (udowodnione po 350 latach, w 1995)

Nie istnieje trójka liczb całkowitych będąca rozwiązaniem równania $a^n=b^n+c^n$ dla $n>2$.

Liczby pierwsze w ciągu Fibonacciego

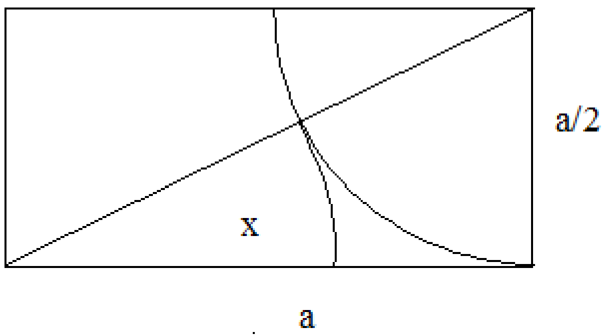
Te wyrazy f_n które są liczbami pierwszymi mogą występować tylko na miejscu *n* będącym liczbą pierwszą (ale nie na odwrót).

Hipoteza

W ciągu Fibonacciego występuje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

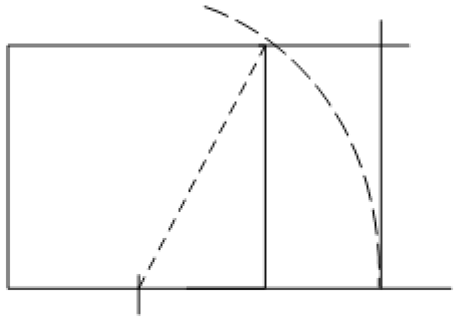
Ćwiczenie

Konstrukcja złotego podziału odcinka o długości a



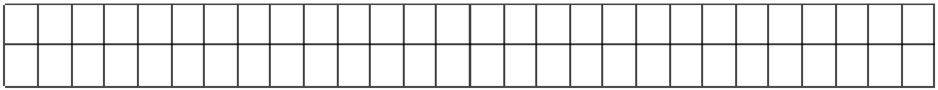
Ćwiczenie

Konstrukcja złotego prostokąta



Przykład

Na ile sposobów można ułożyć kostki domina (o wymiarach 1×2) na prostokącie o rozmiarze $2\times n$?



Oznaczmy, tę liczbę przez d_n w zależności od n.

Dla n=1 jest to możliwe na dokładnie jeden sposób, tzn. d_1 =1.

Dla n=2 są już dwa takie sposoby: ustawiamy obie kostki poziomo, lub obie pionowo, a zatem d_2 =2.

Dla n=3 są trzy sposoby.

W ogólnym przypadku musimy jakoś pokryć dwa skrajne pola przylegające do krótszej krawędzi. Można to zrobić na dwa sposoby:

1. ułożyć jedno domino pionowo - pozostanie prostokąt $2 \times (n-1)$, który można pokryć na d_{n-1} sposobów,

2. ułożyć dwa domina poziomo - pozostanie prostokąt $2 \times (n-2)$, który można pokryć na d_{n-2} sposobów.

Czyli łącznie jest $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$ sposobów pokrycia tablicy 2 na n.

Rozpoznajemy w tym łatwo ciąg Fibonacci'ego.

Wzór $f_0^2 + f_1^2 + \ldots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$.

Dowód przez indukcję po *n*:

dla *n*=0 mamy $f_0^2 = 0 = f_0 \cdot f_1$,

do założonej indukcyjnie równości $f_0^2 + f_1^2 + \ldots + f_k^2 = f_k \cdot f_{k+1}$ dodajmy obustronnie f_{k+1}^2 otrzymując

$$f_0^2 + f_1^2 + \ldots + f_k^2 + f_{k+1}^2 = f_k \cdot f_{k+1} + f_{k+1}^2 = f_{k+1} \cdot (f_k + f_{k+1}) = f_{k+1} \cdot f_{k+2},$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego.

Ogólna postać wzoru na wyraz ciągu Fibonacciego (1843)

(twierdzenie wzór Eulera-Bineta)

$$\mathbf{f_n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Dowód: proszę przestudiować w wykładzie z matematyki dyskretnej [4].

Szkic dowodu:
Dowód rozpoczyna się od zauważenia, że jeśli x_0 jest rozwiązaniem równania $x^2 = x + 1$ to ciąg x_0^n spełnia zależność rekurencyjną Fibonacciego: $x_0^n = x_0^{n-1} + x_0^{n-2}$.

Jednak pierwiastkami równania są $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
I okazuje się, że żaden z ciągów x_1^n, x_2^n nie jest ciągiem Fibonacci'ego, bo na przykład ilorazy kolejnych wyrazów takiego ciągu są stałe.

Zauważmy dalej, że jeżeli ciąg *a* spełnia równanie Fibonacciego, to $\alpha \cdot a$ też.

Jeżeli ciągi *a*, *b* spełniają, to *a+b* też.

Zatem może poszukiwanym rozwiązaniem jest kombinacja liniowa tych pierwiastków? Tak.

Na koniec dowodzimy indukcyjnie, że wzór spełnia równanie rekurencyjne (poniżej używa się małej litery φ, zamiast Φ).

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varphi)^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 = f_0,$$

$$F(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi - \frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1) = 1 = f_1,$$

Aby pokazać, że $F(k+2) = f_{k+2}$ użyjemy pod koniec naszych obliczeń założenia indukcyjnego, że $F(k+1) = f_{k+1}$ i $F(k) = f_k$, a także tego, że zarówno φ jak i 1–φ spełniają zależność $x^{k+2} = x^{k+1} + x^k$:

$$
\begin{aligned}
F(k+2) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{k+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varphi)^{k+2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^k + \varphi^{k+1}) - \frac{1}{\sqrt{5}}((1-\varphi)^k + (1-\varphi)^{k+1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^k - (1-\varphi)^k) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{k+1} - (1-\varphi)^{k+1}) \\
&= F(k) + F(k+1) \\
&= f_k + f_{k+1} \\
&= f_{k+2}.
\end{aligned}
$$

Wniosek Keplera

Granicą ilorazów sąsiednich elementów ciągu Fibonacciego jest liczba Φ.

Dowód (tu również małe φ)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1}-(1-\varphi)^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n}-(1-\varphi)^{n})} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi-\frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varphi)(\frac{1-\varphi}{\varphi})^{n}}{\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\varphi}{\varphi})^{n}} \\ &= \varphi,\end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, iż $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right)^{n}=0,$

jako że $\left|\frac{1-\varphi}{\varphi}\right|<1$.

Macierze liczb Fibonacci'ego

Rozważmy specjalne kwadratowe macierze 2 x 2 liczb Fibonacci'ego o postaci

$$\begin{bmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{bmatrix}$$

Łatwo zauważamy, że

$$\begin{bmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+3} & f_{n+2} \\ f_{n+2} & f_{n+1} \end{bmatrix}.$$

a ponieważ równocześnie

$$\begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

to łatwo indukcyjnie udowodnić, że

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n.$$

Przyrównując wyznaczniki obu macierzy otrzymujemy tożsamość, którą jako pierwszy opublikował Jean-Dominique Cassini w 1680 roku:

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

Korzystając z kolei z faktu, że $A^m A^n = A^{m+n}$ dla dowolnej kwadratowej macierzy A, otrzymujemy:

$$f_n^2 + f_{n-1}^2 = f_{2n-1},$$
$$f_{n+1}f_m + f_n f_{m-1} = f_{m+n}.$$

Znaczne części tego wykładu pochodzą ze strony [4] oraz z książki **F. Corbalan:** ***Złota proporcja. Matematyczny język piękna. Seria: Świat jest matematyczny. RBA 2012***

Rozwiązywanie liniowych równań rekurencyjnych
(uogólniony ciąg Fibonacci'ego)

$$\begin{cases} s_0=A \\ s_1=B \\ s_{n+2}=a\cdot s_{n+1}+b\cdot s_n \end{cases}$$

x^2-ax-b=0, przy b≠0, a≠0, nazywamy charakterystycznym równaniem tej rekurencji.

Przypadek 1: a≠0, b=0
ciąg ma postać A, B, aB, a^2B, a^3B, …
zatem $s_n=a^{n-1}\cdot s_1$, $s_0=A$, $s_1=B$

Przypadek 2: b≠0, a=0
ciąg ma postać A, B, Ab, Bb, Ab^2, Bb^2, …
zatem mamy dwa przeplatające się ciągi geometryczne Ab^k, Bb^k.

Przypadek 3: $b \neq 0$, $a \neq 0$ i równanie ma dwa różne pierwiastki r_1, r_2.
Wtedy rozwiązanie rekurencji ma postać

$$s_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n$$ (udowodnić indukcyjnie!)

gdzie stałe wyznacza się z warunków brzegowych

$$\begin{cases} s_0 = c_1 + c_2 \\ s_1 = c_1 \cdot r_1 + c_2 \cdot r_2 \end{cases}$$

Przypadek 4: $b \neq 0$, $a \neq 0$ i równanie ma podwójny pierwiastek r_0.
Wtedy rozwiązanie rekurencji ma postać

$$s_n = c_1 \cdot r_0^n + c_2 \cdot n \cdot r_0^n$$ (udowodnić indukcyjnie!)

gdzie stałe wyznacza się z warunków brzegowych

$$\begin{cases} s_0 = c_1 \\ s_1 = c_1 \cdot r_0 + c_2 \cdot r_0 \end{cases}$$

1. Przykład – rozwiązać rekurencję

$$\begin{cases} s_0=1 \\ s_1=8 \\ s_{n+2}=4\cdot s_{n+1} - 4\cdot s_n \end{cases}$$

Równanie charakterystyczne ma postać $x^2\text{-}4x+4=0$, więc mamy podwójny $r_0=2$; warunki brzegowe $1=c_1$ oraz $8=c_1\cdot 2 + c_2\cdot 2$, *czyli* $c_1=1$, $c_2=3$, a zatem:

$$s_n=2^n+3n\cdot 2^n$$

2. Znajdź postać zwartą wzoru

$$\begin{cases} s_0 = 5 \\ s_1 = 6 \\ s_{n+2} = 7 \cdot s_{n+1} + 0 \cdot s_n \end{cases}$$

- $x^2 = 7x+0$
- ciąg ma postać 5, 6, $7 \cdot 6$, $7^2 \cdot 6$, $7^3 \cdot 6$, …

zatem $s_n = 7^n \cdot 6$, $s_0 = 5$, $s_1 = 6$

Znajdź postać zwartą wzoru

$$\begin{cases} s_0=2 \\ s_1=-1 \\ s_{n+2}=2\cdot s_{n+1} + 8\cdot s_n \end{cases}$$

Rozwiąż następujące równanie rekurencyjne (postaw hipotezę i udowodnij indukcyjnie):

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_n = I_{n-1} + n \text{ dla } n>0 \end{cases}$$

3. Znajdź postać zwartą wzoru

$$\begin{cases} s_0 = 5 \\ s_1 = 6 \\ s_{n+2} = 0 \cdot s_{n+1} + (-2) \cdot s_n \end{cases}$$

równanie charakterystyczne (?) $x^2 = 0 \cdot x + (-2)$ NIE!

ciąg ma postać 5, 6, $5 \cdot (-2)$, $6 \cdot (-2)$, $5 \cdot (-2)^2$, $6 \cdot (-2)^2$, …
zatem 5, 6, -10, -12, 20, 24, -40, -48, 80, 96, ...

zatem mamy dwa przeplatające się ciągi geometryczne
$5 \cdot (-2)^k$, $6 \cdot (-2)^k$