# *Matematyka dyskretna*

**© Andrzej Łachwa, UJ, 2019**
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

# *4/14*

# Indukcja matematyczna

Poprawność indukcji matematycznej wynika z dobrego uporządkowania liczb naturalnych, czyli z następującej **Zasady Minimum**:

> *Dowolny niepusty podzbiór S zbioru liczb naturalnych ma w sobie liczbę najmniejszą.*

Pierwszy, znany dowód używający tej zasady (Maurolio, 1575) pokazał, że suma początkowych *n* liczb nieparzystych wynosi $n^2$, tzn.:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Aby nie było wątpliwości, jak wygląda wzór dla *n*=0 lepiej go przedstawić w postaci:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots}_{n \text{ składników}} = n^2$$

Dowód korzystający z Zasady Minimum (ZM)

Gdyby rozważana równość nie zachodziła dla wszystkich liczb naturalnych, to zbiór $S = \{n \in \mathbb{N} : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) \neq n^2\}$ byłby niepusty, i zgodnie z Zasadą Minimum miałby liczbę najmniejszą. Oznaczmy ją przez *s (*łatwo sprawdzić, że *s*>5).

Skoro *s* jest najmniejszym kontrprzykładem, to *s*-1 spełnia równość Maurolio, więc: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2s-3) = (s-1)^2$.

Dodając teraz do obu stron równości kolejną liczbę nieparzystą dostajemy

$$1+3+5+\ldots+(2s-3)+(2s-1) = (s-1)^2+(2s-1) = s^2-2s+1+2s-1 = s^2,$$

co oczywiście oznacza, że $s \not\in S$. Tym samym *s* nie może być najmniejszą liczbą w zbiorze kontrprzykładów, a więc w ogóle taki kontrprzykład istnieć nie może, i wobec tego wszystkie liczby naturalne spełniają równość Maurolio.

## Zasada Indukcji Matematycznej

*Jeśli* $Z \subseteq \mathbb{N}$ *jest jakimś zbiorem liczb naturalnych,*

- *w którym jest* $k_0$*, tzn.* $k_0 \in Z$*,*
- *oraz* $Z$ *wraz z każdą liczbą naturalną* $k \geq k_0$ *zawiera również kolejną liczbę* $k+1$*, tzn.* $\forall k \geq k_0 \;\; k \in Z \Rightarrow \;\; k+1 \in Z$*,*

*to wtedy zbiór* $Z$ *zawiera wszystkie liczby naturalne* $n \geq k_0$*,*
*tzn.* $Z \supseteq \mathbb{N} - \{0, 1, \ldots, k_0 - 1\}$.

Pierwszy warunek nazywamy **bazą indukcji**. W drugim warunku najpierw dokonujemy **założenia indukcyjnego** (o tym, że $k \in Z$), a następnie wykonujemy **krok indukcyjny** dowodząc, że $k+1 \in Z$.

***Zasada indukcji matematycznej - inaczej.***

*Jeżeli*

1. istnieje taka liczba naturalna $n_0$, że $T(n_0)$ jest zdaniem prawdziwym,
2. dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \rightarrow T(n + 1)$,

*to $T(n)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$.*

**Zadanie**

Dla dowolnej liczby naturalnej *n≥0* zachodzi: $0+1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ .

Wzór wygląda na prawdziwy, bo np. dla $n=2$ mamy $1+2=3$ oraz $\frac{2\cdot(2+1)}{2}=3$, albo dla $n=5$ mamy $1+2+3+4+5=15$ oraz $\frac{5\cdot(5+1)}{2}=15$.

No to spróbujmy udowodnić, że tak jest dla wszystkich liczb naturalnych.

Niech $Z=\left\{n\in\mathbb{N}:0+1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\right\}$ .

Mamy wtedy 0∈*Z* bo $0=\frac{0\cdot(0+1)}{2}$, oraz

gdy *k*∈Z , tzn. $0+1+2+\cdots+(k-1)+k=\frac{k(k+1)}{2}$, to

$$
\begin{aligned}
0+1+2+\cdots+k+(k+1) &= [0+1+2+\cdots+k] + (k+1) \\
&= \left[\tfrac{k(k+1)}{2}\right] + (k+1) \\
&= \tfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \tfrac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= \tfrac{(k+1)((k+1)+1)}{2}
\end{aligned}
$$

co oznacza, że $k+1 \in Z$. A stąd już możemy wnosić, że $\mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

## Zadanie

Niech $Z = \left\{ n \in \mathbb{N} : 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}$.

Jeśli pokażemy, że $Z = \mathbb{N}$, to dostaniemy ważny wzór na sumę kolejnych kwadratów.

Oczywiście $0 \in Z$.

Nadto, gdy $k \in Z$, to aby stwierdzić czy $k+1$ jest w $Z$

rozważamy sumę:

$$
\begin{aligned}
0^2+1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 &= \left[0^2+1^2+2^2+\cdots+k^2\right] + (k+1)^2 \\
&= \left[\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right] + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)[2k^2+7k+6]}{6} \\
&= \frac{(k+1)[(k+2)(2k+3)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}
\end{aligned}
$$

co świadczy o tym, że $k+1 \in Z$. A zatem $Z = \mathbb{N}$.

*Ilustracją indukcji matematycznej jest efekt domina.*

*Załóżmy, że ułożyliśmy bardzo dużo kostek domina, jedna za drugą. Upewniliśmy się też, że jeśli przewróci się dowolna z nich (założenie indukcyjne) to przewróci się też następna (krok indukcyjny).*

*Wtedy, jeśli ktoś nam powie, że przewrócił czwartą kostkę (baza indukcji) to wiemy, iż wszystkie następne (poza być może pierwszymi trzema) też się przewróciły.*

*W indukcji matematycznej liczby naturalne są niejako kostkami domina ułożonymi dostatecznie blisko siebie.*

## Zadanie

Sprawdźmy, czy funkcja $n \mapsto n^2$ rośnie wolniej niż $n \mapsto 2^n$?

Dla początkowych wartości mamy

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | ... |
| $2^n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | ... |

Aby się przekonać, że w istocie $n^2 < 2^n$ dla $n \geq 5$ przeprowadźmy dowód indukcyjny.

**Lemat**: $2n+1<2^n$ (dla dowolnego $n \geq 3$)

Dowód indukcyjny lematu:

$2 \cdot 3+1=7<8=2^3$ oraz niech wzór prawdziwy dla liczby $k \geq 3$

wtedy $2(k+1)+1 = 2k+3 = (2k+1)+2 < 2^k+2 < 2^k+2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

z założenia indukcyjnego

Zatem lemat prawdziwy dla wszystkich $n \geq 3$.

**Dowód zadania**

$5^2=25<32=2^5$ oraz

niech dla liczby $k>5$ zachodzi $k^2<2^k$, wtedy

$(k+1)^2 = k^2 + (2k+1) < 2^k+2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

z lematu i z założenia indukcyjnego

Zatem na mocy zasady IM wzór prawdziwy dla wszystkich $n>5$.

**Przykład** (nierówność Bernoulliego)

Udowodnimy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $a > -1$ oraz dowolnej naturalnej $n > 0$ zachodzi $(1+a)^n \geq 1 + na$.

- baza: $(1+a)^1 = 1+a$
- z założenia indukcyjnego $(1+a)^k \geq 1 + ka$, poprzez wymnożenie stronami przez dodatnią liczbę rzeczywistą $1+a$, dostajemy

$$\begin{aligned}(1+a)^{k+1} &= (1+a)^k(1+a)\\ &\geqslant (1+ka)(1+a)\\ &= 1+a+ka+ka^2\\ &\geqslant 1+(k+1)a.\end{aligned}$$

Zatem na mocy zasady IM wzór prawdziwy dla wszystkich naturalnych $n > 0$.

**Przykład**

Pokażemy, że o ile tylko $n \geq 2$, to liczba postaci $2^{2^n}$ ma na końcu w zapisie dziesiętnym cyfrę 6. Oznacza to, że $2^{2^n} = 10x + 6$ dla pewnej liczby naturalnej x.

Dowód

- Dla $n = 2$ mamy $2^{2^2} = 16 = 10 \cdot 1 + 6$,
- Nadto, gdy $2^{2^n} = 10x + 6$, to

$$2^{2^{n+1}} = 2^{2^n \cdot 2} = \left(2^{2^n}\right)^2 = (10x+6)^2 = 100x^2 + 120x + 36 = \\ 10\left(10x^2 + 12x + 3\right) + 6.$$

Na mocy zasady IM własność prawdziwa dla wszystkich *n*≥2.

**Przykład** (n-ta liczba harmoniczna)

$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. i przyjmuje się, że $H_0 = 0$.

*Nazwa liczby harmonicznych wzięła się stąd, że możliwe do uzyskania na strunie długości fali stojącej są proporcjonalne kolejno do* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots$.

Oto wartości kilku pierwszych liczb harmonicznych:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $H_n$ | 0 | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{11}{6}$ | $\frac{25}{12}$ | $\frac{137}{60}$ | $\frac{49}{20}$ | $\frac{363}{140}$ | $\frac{761}{280}$ |

Szereg harmoniczny jest rozbieżny do nieskończoności (dowód tego faktu pochodzi ze Średniowiecza) i opiera się na zastąpieniu kolejnych sum częściowych (liczących 2, 4, 8 … składników) ułamkami 1/2.

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}+\ldots=$$

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}+\ldots=$$

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Ponieważ suma liczb w każdej kolejnej sumie częściowej wynosi 1/2, ciąg sum częściowych szeregu nie ma granicy skończonej.

Liczby harmoniczne osiągają dowolnie duże wartości, choć rosną dość wolno (tak wolno jak lg *n*).

**Twierdzenie**

$$\frac{\lfloor \lg n \rfloor + 1}{2} \le H_n \le \lceil \lg n \rceil + 1$$ dla $n \geq 1$.

**Lemat**

$\frac{n+1}{2} \le H_{2^n} \le n+1,$ dla $n \geq 0$.

Dowód lematatu

- dla $n=0$ mamy $\frac{0+1}{2} \le H_1 \le 0+1$, bo $H_1=1$.
- Zakładamy, ża dla dowolnie wybranej liczby *k* mamy $\frac{k+1}{2} \le H_{2^k} \le k+1$,

a wtedy

$$\begin{aligned} H_{2^{k+1}} &= H_{2^k} + \overbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}}^{2^k \text{ składników}} \le k + 1 + 2^k \frac{1}{2^k} \\ &= k + 2. \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} H_{2^{k+1}} &= H_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} \ge \frac{k+1}{2} + 2^k \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{k+2}{2}. \end{aligned}$$

DOWÓD

Niech $\lfloor \lg n \rfloor = k$. Wtedy $2^k \le n < 2^{k+1}$ więc $H_{2k} \le H_n < H_{2k+1}$.

Zatem $\frac{k+1}{2} \le H_{2k} \le H_n < H_{2k+1} \le (k+1)+1$, czyli $\frac{\lfloor \lg n \rfloor + 1}{2} \le H_n \le \lceil \lg n \rceil + 1$

**Przykłady oszacowań**

$H_{31}$= 4,0272...
lg(31)=4,954...

oszacowanie $2,5 \leq 4,0272... \leq 6$

$H_{32}$= 4,0584...
lg(32)=5

oszacowanie $3 \leq 4,0584... \leq 6$

## Przykład

*Proponujemy teraz przeanalizować przykład **błędnego** rozumowania indukcyjnego ZIM. Ćwiczenie to zaproponował George Polya, wybitny węgierski matematyk. Udowodnimy, że wszystkie konie są jednej maści!*

Posłużymy się indukcją względem liczby koni.

- Dowolny zbiór złożony z jednego konia jest zbiorem koni o jednej maści.
- Rozpatrzmy dowolny $k$+1-elementowy zbiór koni. Wybierzmy dowolnego konia z tego zbioru i usuńmy go na chwilę. Na mocy założenia indukcyjnego $k$-elementowy zbiór pozostałych koni jest zbiorem koni o tej samej maści. Dodajmy z powrotem usuniętego konia i usuńmy dowolnego innego. Znów mamy $k$-elementowy zbiór koni, a więc są to konie tej samej maści. Ponadto usunięty koń był tej samej maści co większość koni w obecnym zbiorze. To oznacza, że wszystkie rozpatrywane $k$+1 konie są jednej maści.

Często wygodniej jest zamiast **Indukcji Matematycznej** stosować z pozoru mocniejszą **Zasadę Indukcji Zupełnej**. Tym razem, po to, by wywnioskować, iż $k \in Z$ będziemy mogli skorzystać nie tylko z faktu, że $k\text{-}1 \in Z$, ale ze znacznie mocniejszego założenia, że wszystkie liczby mniejsze niż *k*, tzn. 0, ... *k-1*, są w Z.

*Jeśli* $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$ *jest jakimś zbiorem liczb naturalnych, który wraz z każdym początkowym fragmentem zbioru N postaci* $\{0, \ldots, k-1\}$ *zawiera również kolejną liczbę k*

*(tzn.* $\forall k \in \mathbb{N}$ *jeśli* $(\forall l < k \;\; l \in Z)$*, to również k należy do Z),*

*to wtedy Z zawiera wszystkie liczby naturalne, tzn.* $\mathbb{Z} = \mathbb{N}$*.*

Zasada Indukcji Zupełnej (ZIZ) pozwala skorzystać w dowodzie kroku indukcyjnego($k \in Z$) ze znacznie szerszego założenia indukcyjnego, że $l \in Z$dla wszystkich $l < k$ (a nie tylko dla $k-1$ jak w indukcji matematycznej).

Zwróćmy uwagę, że w Zasadzie Indukcji Zupełnej nie ma wyróżnionego kroku bazowego; jest on ukryty w warunku dla *k*=0: poprzednik implikacji jest wtedy trywialnie spełniony. Zazwyczaj w dowodach przez indukcję zupełną dowód tego brzegowego warunku (bazowego) jest odrębny.

## Przykład

Mamy prostokątną czekoladę złożoną z $n=a \cdot b$ (a, $b$ >0) kwadratowych kawałków, zwanych dalej **kostkami**. Każdy prostokątny fragment czekolady złożony z całych kostek nazywamy **kawałkiem** czekolady.

Przez ułamanie czekolady rozumiemy rozcięcie kawałka czekolady wzdłuż linii pomiędzy kostkami tak, by dostać dwa kawałki. Ile razy trzeba ułamać czekoladę aby rozdzielić jej wszystkie kostki?

Stosując zasadę IZ względem liczby $n$ kostek w czekoladzie udowodnimy, że niezależnie od kolejności cięć potrzeba i wystarcza dokładnie $n$-1 cięć.

**Dowód**

- Jeśli czekolada ma tylko 1 kostkę, to nie trzeba niczego dzielić, więc 0 cięć wystarcza.
- Gdy czekolada ma *k* kostek, to pierwsze jej cięcie podzieli ją na dwa prostokąty o odpowiednio $k_0$ i $k_1$ kawałkach, przy czym $k_0 + k_1 = k$ i $k_0, k_1 < k$. Korzystając teraz z założenia indukcyjnego wiemy, że aby połamać te mniejsze kawałki potrzeba i wystarcza odpowiednio $k_0 - 1$ i $k_1 - 1$ cięć. W sumie wykonamy więc $1 + (k_0 - 1) + (k_1 - 1) = (k - 1)$ cięć, co było do udowodnienia.

## Zasada Maksimum

*Dowolny niepusty i ograniczony od góry podzbiór* $S \subseteq \mathbb{N}$ *zbioru liczb naturalnych ma w sobie liczbę największą.*

Następujące zasady są równoważne:

- Zasada Minimum (ZMin),
- Zasada Indukcji Zupełnej (ZIZ),
- Zasada Indukcji Matematycznej (ZIM),
- Zasada Maksimum(ZMax).

Proszę przeczytać dowód tej równoważności w [4].

Udowodnij, że $6 \mid 8^n — 2^n$ dla wszystkich liczb naturalnych.

1) dla $n=0$ jest $8^0 — 2^0 = 0$
   dla $n=1$ jest $8^1 — 2^1 = 6$
2) zakładam, że dowolnie wybranej ustalonej liczby $k \geq 1$: $6 \mid 8^k — 2^k$
   czyli istnieje liczba naturalna p taka, że $8^k — 2^k = 6 \cdot p$

   $8^{k+1} — 2^{k+1} = 8 \cdot (8^k — 2^k) + ?$

uwaga: $8 \cdot (8^k — 2^k) = 8^{k+1} — 8 \cdot 2^k = 8^{k+1} — 4 \cdot 2^{k+1}$
więc dodam w miejsce ? wyrażenie $3 \cdot 2^{k+1}$
teraz korzystamy z założenia i mamy $8 \cdot (6 \cdot p) + 3 \cdot 2^{k+1} = 8 \cdot (6 \cdot p) + 6 \cdot 2^k =$
$= 6 \cdot (8 \cdot p + 2^k)$, czyli jest podzielne przez 6

Zatem na mocy zasady IM $6 \mid 8^n — 2^n$ dla wszystkich liczb naturalnych.

Udowodnij, że $7 \mid 11^n - 4^n$ dla wszystkich liczb naturalnych.

1) dla $n=0$ jest $11^0 - 4^0 = 0$
   dla $n=1$ jest $11^1 - 4^1 = 7$
2) zakładam, że dla dowolnie ustalonej liczby $k \geq 1$ jest $7 \mid 11^k - 4^k$
   czyli istnieje liczba naturalna p taka, że $11^k - 4^k = 7 \cdot p$

   $$11^{k+1} - 4^{k+1} = 11 \cdot (11^k - 4^k) + 7 \cdot 4^k = 11 \cdot 7 \cdot p + 7 \cdot 4^k = 7 \cdot (11 \cdot p + 4^k)$$

   czyli jest podzielne przez 7

Zatem na mocy zasady IM $7 \mid 11^n - 4^n$ dla wszystkich liczb naturalnych.

Udowodnij, że $n^2 > n+1$ dla wszystkich naturalnych $n>1$.

1) dla $n=2$ jest $4>3$
   dla $n=3$ jest $9>4$
2) wezmę dowolną liczbę $k \geq 2$ i założę, że $k^2 > k+1$
   pokażę, że wtedy $(k+1)^2 > (k+1)+1$

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > k+1 + 2k + 1 = k+2 + 2k > k+2$$

Zatem na mocy IM nierówność $n^2 > n+1$ zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n>1$.

Udowodnij, że suma sześcianów kolejnych liczb naturalnych to ich kwadrat sumy:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2$$

1) dla n=0 wzór nie ma sensu, bo co to jest suma zera składników?
dla n=1 jest 1=1
dla n=2 jest $1^3+2^3 = 3^2$ czyli 9=9

2) zakładam, że wzór zachodzi dla liczby $k \geq 2$
i korzystam ze wzoru na sumę kolejnych liczb naturalnych:

$$1+2+3+...+n = n \cdot (1+n)/2$$

Wtedy
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = (1+2+3+...+k)^2 + (k+1)^3 =$
$= k^2 \cdot (1+k)^2/2^2 + (k+1)^3 = ((1+k)^2/2^2)(k^2+4k+4) = ((k+1)^2/2^2)(k+2)^2 =$
$(((k+1)/2)(k+2))^2 = (1+2+3+...+k+k+1)^2$

Zatem na mocy zasady IM wzór na sumę sześcianów zachodzi dla wszystkich naturalnych $n>0$.

Udowodnij indukcyjnie, że $5 \mid n^5 - n$.

1) zachodzi dla 0, 1, 2

2) zakładam, że zachodzi dla k>0, czyli istnieje naturalna p ...

$(k+1)^5-(k+1) = k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1 - (k+1) = k^5 - k + 5(k^4+2k^3+2k^2+k) =$

$5p + 5(k^4+2k^3+2k^2+k)$

...

Udowodnij, że $2 \mid n^5 - n$.

$$n^5-n = n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)=\underbrace{n(n-1)(n+1)}(n^2+1)$$

to są trzy kolejne liczby naturalne, więc jedna z nich musi być parzysta

Udowodnij, że $10 \mid 37^{500} - 37^4$.

a) $37^{500} - 37^4 = 37^{500} - 37^{100} + 37^{100} - 37^{20} + 37^{20} - 37^4 =$
$(37^{100})^5 - 37^{100} + (37^{20})^5 - 37^{20} + (37^4)^5 - 37^4 =$
$= (n^5 - n) + (m^5 - m) + (k^5 - k)$
a każdy z tych trzech składników jest liczbą podzielną przez 5

b) 37 jest liczbą nieparzystą
każda potęga liczby nieparzystej jest nieparzysta
różnica dwóch liczb nieparzystych jest liczba parzystą

zatem $10 \mid 37^{100} - 37^4$ bo jest parzyste i jest podzielne przez 5.

Udowodnij, że $10 \mid 37^{100} - 37^{20}$.

$37^{100} - 37^{20} = (37^{20})^5 - 37^{20} = n^5 - n$

Udowodnij, że $10 \mid 37^4 - 1$.

pierwszy sposób

$37^2 = 1369$

$37^4 - 1 = (37^2 - 1)(37^2 + 1) = 1368 \cdot 1370 = 1368 \cdot 137 \cdot 10$

drugi sposób

$37^5 - 37 = 5 \cdot 2 \cdot k$ oraz $37^5 - 37 = 37 \cdot ( 37^4 - 1)$

a liczba 37 nie jest podzielna ani przez 2 ani przez 5

Udowodnij indukcyjnie, że

$4+10+16+...+(6n-2) = n(3n+1)$

krok indukcyjny:

$4+10+16+...+(6k-2)+(6(k+1)-2) = k(3k+1) + (6(k+1)-2) = 3k^2 + 7k + 4 =$
$(k+1)(3k+4) = (k+1)(3(k+1)+1)$ cbdo

Udowodnij indukcyjnie, że $2 \mid n^2+5n+1$.

Krok indukcyjny:

$(k+1)^2+5(k+1)+1 = k^2+5k+1 +2k+6 = 2p + 2(k+3)$

… ale np. dla n=2 mamy $2^2+5\cdot 2+1 =15$.

Okazuje się, że $n^2+5n+1$ jest zawsze liczbą nieparzystą!

Udowodnij indukcyjnie, że $8 \mid 5^{n+1}+2\cdot 3^{n}+1$.

1) dla n=0: $5+2+1=8$

   dla n=1: $25+6+1=32=8\cdot 4$

2) zakładam, że podzielne dla danej liczby $k \geq 0$

$$5^{(k+1)+1}+2\cdot 3^{(k+1)}+1 = 5\cdot(5^{k+1}+2\cdot 3^{k}+1) - 4\cdot 3^{k} - 4 =$$
$$= 5\cdot \quad 8p \qquad - 4\cdot(3^{k} - 1) = 8\cdot 5p - 8q$$

bo $3^{k} - 1$ jest parzyste (równe 2q).

Na mocy zasady IM dla wszystkich liczb naturalnych $8 \mid 5^{n+1}+2\cdot 3^{n}+1$.

Udowodnij indukcyjnie, że $73 \mid 8^{n+2}+9^{2n+1}$.

1) dla n=0: $64+9=73$
   dla n=1: $512+729=1241=17\cdot 73$
2) zakładam, że podzielne dla danej liczby $k \geq 0$

$$8^{k+1+2}+9^{2(k+1)+1} = 8\cdot(8^{k+2}+9^{2k+1}) + 73\cdot 9^{2k+1} = 8\cdot 73p + 73\cdot 9^{2k+1} = 73(8p+9^{2k+1})$$

Zatem na mocy IM wyrażenie jest podzielne przez 73 dla wszystkich naturalnych.

## Zadania

Znajdź zbiór tych liczb naturalnych, dla których zachodzi nierówność $5n<n^2-3$. Wykorzystaj zasadę indukcji (nie stosuj metod analitycznych).

Udowodnij indukcyjnie, że $16 \mid 5^n-4n-1$.

Udowodnij indukcyjnie, że $3n^2+3n+1<3^n$.

Udowodnij indukcyjnie, że 3n2+3n+1<3n.

Udowodnij indukcyjnie, że $16 \mid 5^n-4n-1$.

Napisz litery greckie: małe – *omega, sigma, ni*,

duże – *psi, ro, lambda*.