Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2019
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

2B/14

Relacje

Pojęcia:

relacja czyli relacja dwuargumentowa

relacja w zbiorze A

relacja n-argumentowa

Relacja $E = \{(x, x): x \in S\}$ jest **relacją równości** w zbiorze S. Piszemy xEx lub $x=x$ lub $(x, x) \in E$.

Relację odwrotną do relacji A oznaczamy A^{-1}. Każda relacja ma relację odwrotną.

Relacja modulo *n*

Jest to relacja w zbiorze liczb całkowitych Z, przy czym n jest liczbą naturalną i $n>0$. Liczba a jest w relacji z liczbą b (a przystaje modulo n do liczby b) wtw gdy różnica $a - b$ jest wielokrotnością n. Piszemy $a \equiv_n b$.

Złożeniem relacji A w zbiorze S i relacji B w zbiorze S nazywamy relację C w zbiorze S taką, że xCy wtw gdy istnieje $z \in S$ takie, że xAz i zBy.

Każde dwie relacje w zbiorze S można złożyć!

Piszemy: $xABy$, $x(A \circ B)y$, $y=B(z)=B(A(x))$.

Dla wielokrotnych złożeń jednej relacji stosujemy notację „potęgi”, np.
$xAAy = xA^2 y$, $xAAAy = xA^3 y$ ...

Domknięciem relacji A w zbiorze S **z uwagi na operację składania relacj**i nazywamy relację A^d w zbiorze S taką, że $xA^d y$ jeśli istnieje ciąg $z_0=x$, z_1, z_2, … z_{n-1}, $z_n=y$ taki, że $z_0\ A\ z_1\ A\ z_2\ A\ \ldots\ A\ z_{n-1}\ A\ z_n$.

Zatem $xA^d y$ wtw gdy istnieje n takie, że $xA^n y$.

Jest to jedno z wielu możliwych domknięć relacji A. Nazywamy je również przechodnim domknięciem A.

Lemat

Przechodnie domknięcie relacji A jest sumą wszystkich potęg tej relacji:

$A^d = A \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots \cup A^n \cup \ldots$

Ogólne określenie domknięcia

Niech α będzie rodziną relacji w zbiorze *S, A* dowolną relacją w *S*.
Relacja A^{d} jest domknięciem *A* w zbiorze relacji α gdy:

(1) $A \subset A^{\mathrm{d}}$

(2) $A^{\mathrm{d}} \in \alpha$

(3) dla każdej relacji *B* jeżeli $A \subset B$ i $B \in \alpha$ to $A^{\mathrm{d}} \subset B$

A zatem domknięciem relacji *A* z uwagi na własność α jest najmniejszą relacją zawierającą *A* i posiadającą własność α.

Reprezentacja macierzowa

Niech S będzie zbiorem n-elementowym i A relacją w S.

Ponumerujmy elementy zbioru S i zbudujmy tablicę kwadratową o wymiarze n. Na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny wpisujemy 1 jeśli $x_i A x_j$, w przeciwnym wypadku 0. Elementy takiej macierzy oznaczać będziemy przez a_{ij}, a całą macierz przez $[a_{ij}]$.

Oczywiście istnieje n! różnych numeracji zbioru S, czyli n! różnych macierzy opisujących relację A w S.

Macierz, której wszystkie elementy są zerami określa **relację pustą**.

Macierz, której wszystkie elementy są jedynkami określa **relację pełną** (uniwersalną).

Macierz $[\delta_{ij}]$, gdzie $\delta_{ij}=1$ dla $i=j$ oraz $\delta_{ij}=0$ dla $i\neq j$, określa relację **równości**.

Symbol δ_{ij} nazywamy **deltą Kroneckera**. Macierz $[\delta_{ij}]$ zawiera jedynki na przekątnej i zera poza przekątną. Nazywamy ja macierzą Kroneckera.

Macierz $[a_{ij}] = [1-\delta_{ij}]$ określa relację **nierówności**.

Lemat

Tylko dla tych czterech relacji (pustej, pełnej, równości i nierówności) ich macierze pozostają niezmienione dla różnych numeracjach zbioru S.

Niech R relacja w zbiorze S. Wprowadza się następujące własności relacji:

- **zwrotność**

  $(x, x) \in R$ dla wszystkich $x \in S$

- **symetria**

  $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ dla wszystkich $x \in S, y \in S$

- **przechodniość**

  $(x, y) \in R$ i $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ dla wszystkich $x \in S, y \in S, z \in S$

Lematy

Relacja R jest przechodnia wtw gdy $R^2 \subseteq R$.

Relacja R jest przechodnia wtw gdy $R = R^d$.

Relacja **niezwrotna**, to relacja, która nie jest zwrotna,

tzn. $(x, x) \notin R$ dla pewnego $x \in S$

Relacja **przeciwzwrotna** (antyzwrotna), to nowa własność:

$(x, x) \notin R$ dla wszystkich $x \in S$

Lematy

Relacja zwrotna zawiera relację równości.

Relacja pełna i relacja równości są zwrotne.

Relacja przeciwzwrotna jest relacją niezwrotną.

Macierz relacji przeciwzwrotnej ma zera na przekątnej.

Relacja pusta jest przeciwzwrotna.

Relacja asymetryczna, to relacja która nie jest symetryczna:

$$(x, y) \in R \text{ i } (y, x) \notin R \text{ dla pewnych } x \in S,\ y \in S.$$

Relacja R w zbiorze S jest zwana **przeciwsymetryczną**, gdy z dwóch zależności xRy, yRx co najmniej jedna jest nieprawdziwa:

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R \text{ dla wszystkich } x \in S,\ y \in S.$$

Relacja R w zbiorze S jest zwana **antysymetryczną**, gdy prawdziwość dwu zależności xRy, yRx jest równoważna równości x i y:

$$(x, y) \in R \text{ i } (y, x) \in R \text{ wtw } x = y.$$

Lematy

Macierz relacji symetrycznej jest symetryczna względem przekątnej.

Relacja A jest symetryczna wtw gdy $A=A^{-1}$.

Relacja A jest przeciwsymetryczna wtw gdy $A \cap A^{-1}=\emptyset$.

Relacje pusta, pełna, równości i nierówności są symetryczne.

Relacja pusta jest również przeciwsymetryczna.

Relacja przeciwsymetryczna jest przeciwzwrotna.

Relacja równości nie jest przeciwsymetryczna!

Relacja A jest antysymetryczna wtw gdy $A \cap A^{-1} \subseteq$ E (gdzie E to relacja równości).

Relacje pusta i równości są antysymetryczne.

Niech R relacja w zbiorze S. Wprowadza się kolejne własności relacji:

- **spójność**

  $(x, y)\in R$ lub $(y, x)\in R$ dla wszystkich $x, y\in S$

- **słaba spójność**

  $(x, z)\in R$ i $(y, z)\in R$ dla pewnego $z\in S \;\Rightarrow\; (x, y)\in R$ lub $(y, x)\in R$

Lematy

Relacja $<$ w zbiorze liczb rzeczywistych jest …

Relacja $\leq$ w zbiorze liczb rzeczywistych jest …

Własności relacji a działania na relacjach

Jeśli A, B są zwrotne to $A \cup B$, $A \cap B$, AB, A^{-1}, A^{d} są zwrotne.

Jeśli A, B są przeciwzwrotne to $A \cup B$, $A \cap B$, A^{-1} są przeciwzwrotne.

Jeśli A, B są symetryczne to $A \cup B$, $A \cap B$, A^{-1} są symetryczne.

Domknięcie relacji symetrycznej jest symetryczne.

Jeśli A jest przeciwsymetryczna to A^{-1} jest przeciwsymetryczna.

Jeśli A jest przeciwsymetryczna to dla dowolnej B relacja $A \cap B$ jest przeciwsymetryczna.

Jeśli A, B są antysymetryczne to $A \cap B$, A^{-1} są antysymetryczne.

Jeśli A, B są przechodnie to $A \cap B$, A^{-1} i A^{d} są przechodnie.

<u>Równość, równoważność, podobieństwo, tolerancja</u>

Pojęcie podobieństwa wykorzystujemy głównie do budowania zbiorów (zbiór składa się z elementów podobnych!). I choć termin „zbiór" może być pojmowany na wiele sposobów oraz często zastępujemy go terminami „typ encji" czy „klasa obiektów", nie zmienia to istoty sprawy. Łącząc elementy w zbiór podejmujemy decyzję, na czym ma polegać ich podobieństwo.

Najwyższym stopniem podobieństwa jest **nierozróżnialność**, a nie równość. Równość jest szczególnym przypadkiem nierozróżnialności i szczególnym przypadkiem podobieństwa. Równość (identyczność) to także zastępowalność jednego obiektu drugim w określonej sytuacji. Podobieństwo oznacza tylko częściową zastępowalność, możliwość zastąpienia jednego obiektu drugim, ale z pewnym ryzykiem czy pewną stratą.

Podobieństwo obiektów danego uniwersum jest w matematyce zwane **tolerancją** (relacją zwrotną i zarazem symetryczną). Nie jest zaś wymagana przechodniość, a to dlatego, że obiekty podobne nie są identyczne: nieznacznie różnią się od siebie i te drobne różnice między kolejnymi podobnymi obiektami mogą doprowadzić do obiektów całkowicie różnych od tych początkowych.

Przykładem podobieństwa jest znana zabawa ze słowami polegająca na przekształceniu słowa początkowego w słowo końcowe poprzez kolejne słowa różniące się tylko jedną literą, np. możemy w taki sposób przekształcić słowo „kot” w słowo „lew”:

kot – kos – los – lis – lin – len – lew.

Zbiór U z określoną na nim relacją tolerancji T nazywa się **przestrzenią tolerancji**. Struktura tej przestrzeni jest bardzo ciekawa. W szczególności okazuje się, że dowolną tolerancję można określić przy pomocy zbioru cech elementów uniwersum U w taki sposób, że elementami podobnymi są te, które mają co najmniej jedną wspólną cechę.

Lematy

Jeśli A i B są tolerancjami, to $A \cup B$, $A \cap B$, A^{-1}, A^d są tolerancjami.

Domknięcie tolerancji A jest najmniejszą relacją równoważności zawierającą A.

Jeśli A jest zwrotna, to $A \cup A^{-1}$, $A \cap A^{-1}$, $A\, A^{-1}$ są tolerancjami.

W matematyce **podobieństwo** często definiuje się nie jako relację tolerancji, lecz jako szczególną relację równoważności – równokształtność.

Na przykład w geometrii dwa wielokąty uznaje się za podobne, gdy mają te same kąty i proporcje: mają taki sam kształt, ale mogą mieć różną wielkość. Podobnie w algebrze: dwa wyrażenia nazywa się podobnymi, gdy mają ten sam kształt z dokładnością do współczynników liczbowych. Przykłady takie można mnożyć.

Zadania

Czy suma dwóch relacji równoważności jest równoważnością? Odpowiedź uzasadnij.

Udowodnij, że jeśli A zwrotna to $A \cap A^{-1}$ jest tolerancją.

Co to jest funkcja charakterystyczna zbioru *A* w przestrzeni *S*?

Niech *A* relacja w zbiorze *S.* Co to znaczy, że *xAAAy,* dla $x, y \in S$.

Udowodnij, że $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ za pomocą diagramów Venna.

Udowodnij formalnie, że $(A \subset B \text{ i } A \subset C) \Rightarrow A \subset B \cap C$.

Udowodnij równość $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$.

Sprawdź, czy prawdziwe są zdania: $(A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C)$, $(A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C)$.

Czy to prawda, że dla dowolnego zbioru S zbiór $\mathscr{P}(S)$ ma co najmniej 2 elementy?

Udowodnij, że $\varnothing \subset \{\varnothing\}$, $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, ((S jest zbiorem) $\Rightarrow$ to $\varnothing \subset$ S).

Czy to prawda, że $[0, 1] \setminus (0, 1) = \{0, 1\}$?

Wyznacz zbiór $[0, 3] \setminus [2, 6]$ oraz zbiór $[0, 3]'$

Wypisz elementy $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathrm{A}))$, gdzie $\mathrm{A}=\{a, b\}$.

Narysuj diagram Venna dla 4 zbiorów.

Wypisz elementy $\mathscr{P}(\mathrm{A}\times\mathrm{B})$, gdzie $\mathrm{A}=\{a, b\}$, $\mathrm{B}=\{0,1\}$.

Udowodnij, że odejmowanie zbiorów nie jest działaniem przemiennym.

Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów $(\mathrm{A}\setminus\mathrm{B})\cup\mathrm{B}=\mathrm{A}$?

Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów $\mathrm{A}\oplus\mathrm{B}=\varnothing$ wtw $\mathrm{A}=\mathrm{B}$?

Udowodnij wszystkie wypisane wcześniej lematy o relacjach.

Zdefiniuj dowolną relację spójną na zbiorze $R = \{0,1\}^4$.

Dodatkowo proszę powtórzyć:

- arytmetykę modularną (operacja modulo)
- rozwiązywanie równań modularnych (liniowych).