Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2019
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

2A/14

Zbiory

Gdy mówię o zbiorze monet w portmonetce, to najlepszą strukturą danych może okazać się torba, czyli zbiór z powtórzeniami.

G*dy myślę o czasie, jaki upłynie od teraz do końca dzisiejszego dnia, to najlepszym modelem tego odcinka czasu wydaje mi się zbiór mereologiczny.*

Gdy słyszę o wysokiej opłacalności pewnej inwestycji, to właściwym modelem tej oceny będzie zbiór rozmyty (fuzzy set).

Gdy wybieram nowy komputer, to biorę pod uwagę zbiór komputerów, który pojmuję jako zbiór przybliżony (rough set).

Są jeszcze zbiory dystrybutywne ... i różne inne (intuicjonistyczne, bipolarne, aproksymowane, przedziałowe, probabilistyczne etc.).

Zbiory dystrybutywne

Według G. Cantora (1883) zbiór, to *każda wielość, która da się pomyśleć jako jedność, tzn. każdy ogół określonych elementów, który można za pomocą jakiegoś prawa powiązać w całość*.

Tak rozumianym zbiorem jest na przykład ogół liczb pierwszych, a prawem, które wiąże w całość te liczby, jest definicja liczby pierwszej.

Liczby pierwsze, to 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 itd. Rozstrzygnięcie, czy dana liczba jest pierwsza może być jednak trudne, np. 4 294 967 297. Nie zmienia to faktu, że albo jest ona albo nie jest liczbą pierwszą.

Dwa zbiory <u>są równe</u> jeśli mają te same elementy.

$\{n \in N$: n jest liczba parzystą$\} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$

$\{1, 2, 3\} = \{2, 2, 2, 1, 3, 3\}$

$\{(-1)^n : n \in N\} = \{-1, 1\}$

$\{\{1\}, \{1,2\}\} \neq \{1, 2\}$

$(1, 2) \mathbf{=} \{\{1\}, \{1,2\}\}$

Używamy symboli $=$, $\subset$ (czasami $\subseteq$), $\in$ (litera alfabetu greckiego), $\varnothing$ (litera alfabetu norweskiego).

UWAGA: dla operacji definiowania nie powinniśmy używać tego samego symbolu, co dla relacji równości.

Często wygodnie jest ustalić pewien zbiór U, zwany uniwersum, i rozpatrywać jego elementy i jego podzbiory.

Wtedy zbiór A elementów uniwersum U ma dopełnienie A' do uniwersum U, równe $U \backslash A$ (gdzie symbol \ oznacza różnicę zbiorów).

W tych wykładach zajmować się będziemy zbiorami co najwyżej przeliczalnymi, tzn. albo skończonymi albo nieskończonymi, ale równolicznymi ze zbiorem liczb naturalnych.

I często będziemy starać się najpierw określić uniwersum, a potem mówić o zbiorze elementów tego uniwersum. Dlaczego? Dlatego, żeby wiedzieć, o czym mówimy: o liczbach, przedmiotach, kolorach czy zwierzętach?

Operacje na zbiorach

Rodzina wszystkich podzbiorów zbioru *U* z operacjami sumy, iloczynu i dopełnienia, oraz z wyróżnionym zbiorem pustym i zbiorem pełnym jest algebrą Boole'a.

Różnicą symetryczną zbiorów *A* i *B* nazywamy zbiór tych elementów wymienionych zbiorów, które nie należą do nich jednocześnie. Operator ten oznaczamy przez $\oplus$.

Jeżeli A_1, A_2, … są zbiorami, to przez $\bigcup_{i=1,2,\ldots} A_i$ oznaczamy sumę tych zbiorów. Indeksy mogą być wyrażone inaczej, np. „$i \in I$” albo „$5<i<12$”. Podobnie dla iloczynu.

Produkt kartezjański zbiorów A i B oznaczamy przez $A \times B$, produkt $A \times A$ oznaczamy przez A^2 i podobnie dla większej liczby zbiorów, np. $A \times A \times A$ oznaczamy przez A^3.

Uogólnieniem dodawania i mnożenia są operacje trójkątne. Pary takich operacji mogą być różnie definiowane w zależności od sposobu pojmowania zbioru. Np. w odniesieniu do zbiorów rozmytych możemy zdefiniować dodawanie i mnożenie w których siła operacji zależy od wartości parametru występującego w definicji odpowiedniego operatora.

Liczność zbioru

Dla każdego zbioru skończonego A liczbę jego elementów oznaczamy przez $|A|$.

Jak wiemy:

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

$|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$ (i dlatego czasami $\mathscr{P}(A)$ oznacza się przez 2^A)

W przypadku zbiorów z powtórzeniami możemy mówić o liczności zbioru, ale także o liczbie różnych elementów i o liczbie powtórzeń każdego z tych elementów.

W przypadku zbiorów rozmytych liczność wszystkich zbiorów jest taka sama ...

Oznaczenia

Na oznaczenie przedziałów liczbowych używamy nawiasów okrągłych i kwadratowych, ale (7, 9) może oznaczać przedział i może oznaczać parę liczb!

Jeśli mówimy o przedziale liczbowym to musimy wskazać jaki zbiór liczb stanowi nasze uniwersum. Możemy np. mówić o przedziale liczb naturalnych, przedziale liczb wymiernych itd.

Zatem napis (7,9) ma zwykle sens wynikający z kontekstu bądź z opisu, ale może być wieloznaczny!