# *Matematyka dyskretna*

***© Andrzej Łachwa, UJ, 2019***
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

# *1B/14*

# Drogi w grafach

**Marszruta** (trasa) w grafie *G* z wierzchołka *w* do wierzchołka *u* to skończony ciąg krawędzi w postaci $wv_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}u$.
W skrócie marszrutę taką oznaczamy przez

$$w \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{k-1} \to u,$$

przy czym strzałki oznaczają tu krawędzie nieskierowane!

Wierzchołek *w* nazywać będziemy początkowym, a *u* końcowym wierzchołkiem marszruty. Marszruta zamknięta to marszruta kończąca się w punkcie wyjścia, czyli taka, w której $w = u$. Długość marszruty $w \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{k-1} \to u$ to liczba jej krawędzi.

Uwaga: niektóre wierzchołki, a nawet krawędzie, mogą powtarzać się w marszrucie!

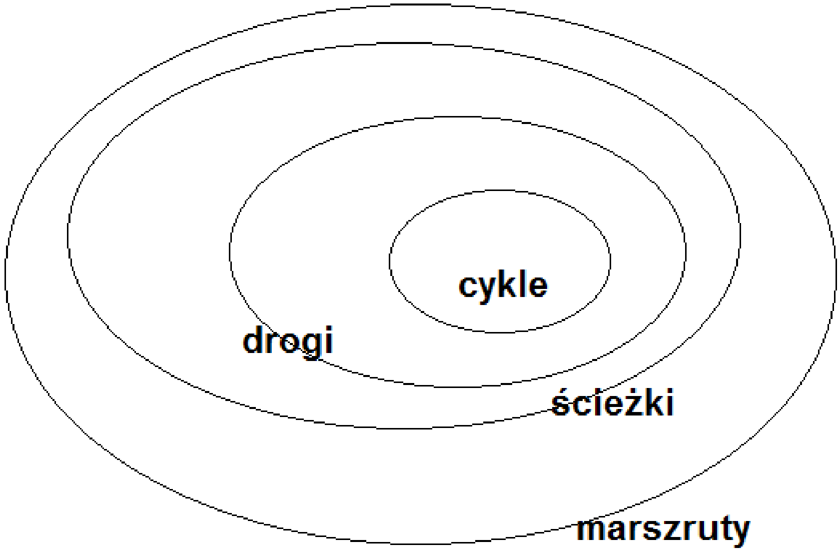
Marszruta może być również zdefiniowana w grafach skierowanych. Definiuje się ją analogicznie i nazywa **skierowaną**.

Marszrutę, w której wszystkie krawędzie są różne nazywa się **ścieżką.**

**Droga** to ścieżka bez powtarzających się wierzchołków, z wyjątkiem pierwszego i ostatniego, które mogą być równe.

**Cykl** to marszruta zamknięta, w której jedynym powtarzającym się wierzchołkiem jest jej początek (będący oczywiście również jej końcem). A zatem cykl jest ścieżką i drogą.

Czasem wygodnie jest traktować marszruty w grafie $\mathbf{G}$ (a więc w szczególności również drogi, cykle i ścieżki) jako podgrafy
$\mathbf{M} = (\mathsf{V}(\mathbf{M}), \mathsf{E}(\mathbf{M})) := (\{v_0, \ldots, v_k\}, \{\{v_0, v_1\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}\})$.


cykle
drogi
ścieżki
marszruty

**Graf spójny** to graf, w którym między dwoma dowolnymi wierzchołkami istnieje droga. **Graf niespójny** to graf, który nie jest spójny.

**Spójna składowa** grafu $\mathbf{G} = (V, E)$ to maksymalny (w sensie inkluzji) podzbiór $X \subseteq V$, indukujący graf spójny $\mathbf{G}|_X$.

Dowolny graf *G* rozpada się na spójne składowe tworzące podział zbioru *V*. Grafy spójne mają jedynie jedną spójną składową, w przeciwieństwie do grafów niespójnych posiadających ich więcej.

Rozkład na spójne składowe wyznacza relację równoważności $\sigma \subseteq V \times V$, dla której graf ilorazowy $\mathbf{G}/\sigma$ jest antykliką.

**Wierzchołek izolowany** to wierzchołek nie posiadający sąsiadów.

Punkty izolowane tworzą jednoelementowe spójne składowe.

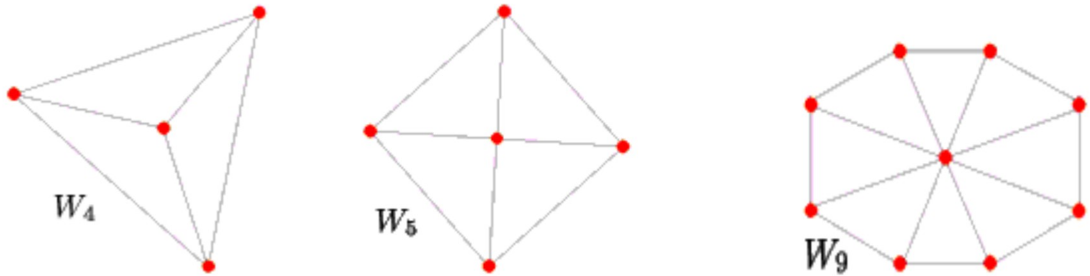
Intuicyjnie wydaje się, że graf spójny powinien mieć dostatecznie dużo krawędzi w stosunku do liczby wierzchołków. Okazuje się jednak, że w grafie spójnym $\mathbf{G} = (V, E)$, gdzie $|V|=n$, liczba krawędzi musi należeć do przedziału $[n-1, (n(n-1))/2]$. Rezultat ten można uzyskać z bardziej ogólnego wyniku:

**Twierdzenie**

W grafie prostym $\mathbf{G} = (V, E)$ o $k$ składowych spójnych liczba jego krawędzi spełnia nierówności $|V| - k \leq |E| \leq \frac{(|V|-k)(|V|-k+1)}{2}$.

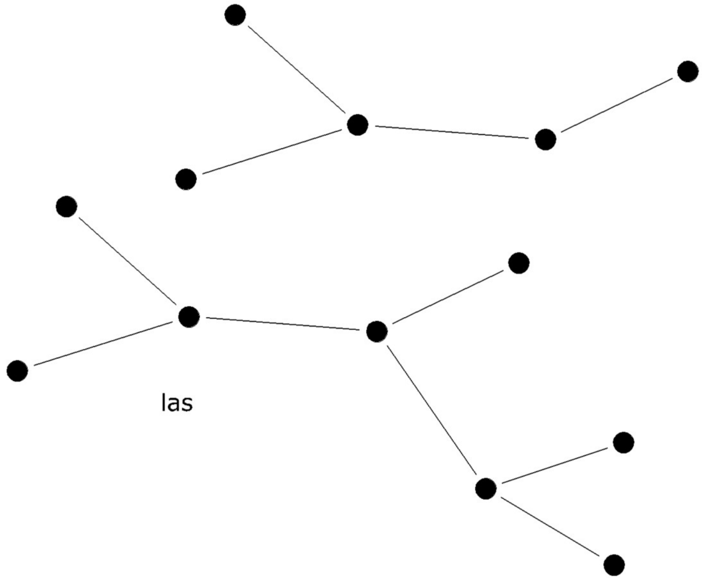
Ponadto, są to najlepsze możliwe ograniczenia, tzn. istnieje graf prosty $\mathbf{G} = (V, E)$ o dokładnie $k$ składowych spójnych, w którym $|E| = |V| - k$, a także istnieje graf prosty $\mathbf{G} = (V, E)$ o dokładnie $k$ składowych spójnych, w którym $|E| = \frac{(|V|-k)(|V|-k+1)}{2}$.

**Koła** to grafy powstałe z jednego cyklu przez dodanie do cyklu jeszcze jednego wierzchołka i połączenie tego wierzchołka ze wszystkimi wierzchołkami cyklu. Koło o *n* wierzchołkach oznaczamy $W_n$.



# Lasy i drzewa

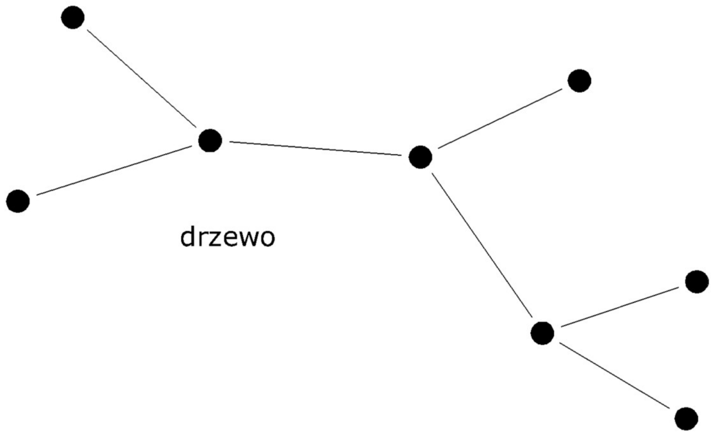
**Las** to graf prosty nie zawierający żadnych cykli.



**Drzewo** to graf spójny nie zawierający cykli. Zatem drzewo to każdy spójny podgraf lasu.

**Liść drzewa** to wierzchołek o stopniu $1$.

**Drzewo rozpinające** grafu $G$ to podgraf grafu $G$ zawierający wszystkie jego wierzchołki i będący drzewem.



**Twierdzenie**

Dla grafu prostego $\mathbf{T} = (V, E)$ następujące warunki są równoważne:

1) $\mathbf{T}$ jest drzewem,

2) $\mathbf{T}$ nie zawiera cykli i ma $|V| - 1$ krawędzi,

3) $\mathbf{T}$ jest spójny i ma $|V| - 1$ krawędzi,

4) $\mathbf{T}$ jest spójny, zaś usunięcie dowolnej krawędzi tworzy dokładnie dwie spójne składowe,

5) dowolne dwa wierzchołki grafu $\mathbf{T}$ są połączone dokładnie jedną drogą,

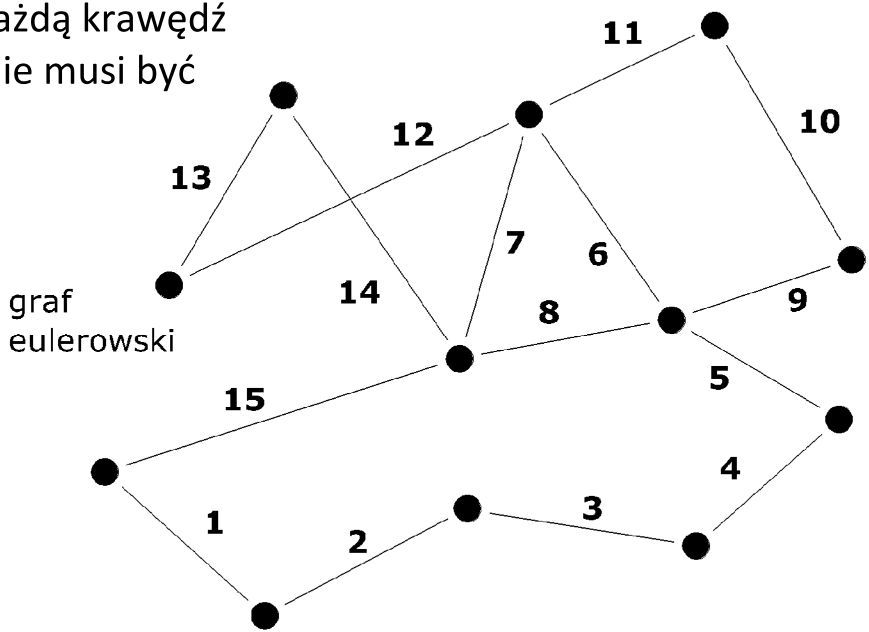
6) $\mathbf{T}$ nie zawiera cykli, lecz dodanie dowolnej nowej krawędzi tworzy dokładnie jeden cykl.

**Wniosek:** Każdy las $\mathbf{G} = (V, E)$ o *k* składowych spójnych posiada $|E| = |V| - k$ krawędzi.

# Grafy eulerowskie

Cykl Eulera to zamknięta marszruta przechodząca przez każdą krawędź grafu dokładnie raz (nie musi być drogą ani cyklem).

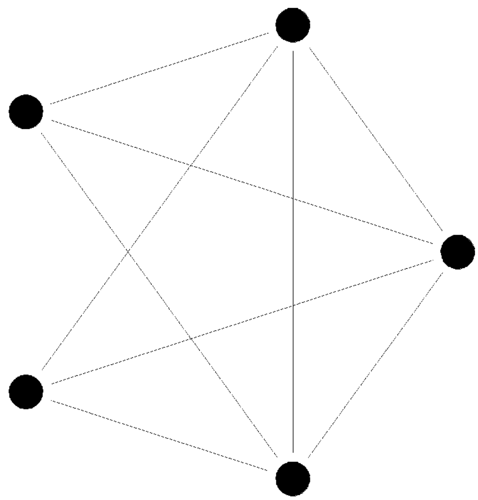
Graf eulerowski to graf posiadający cykl Eulera.



**Twierdzenie**

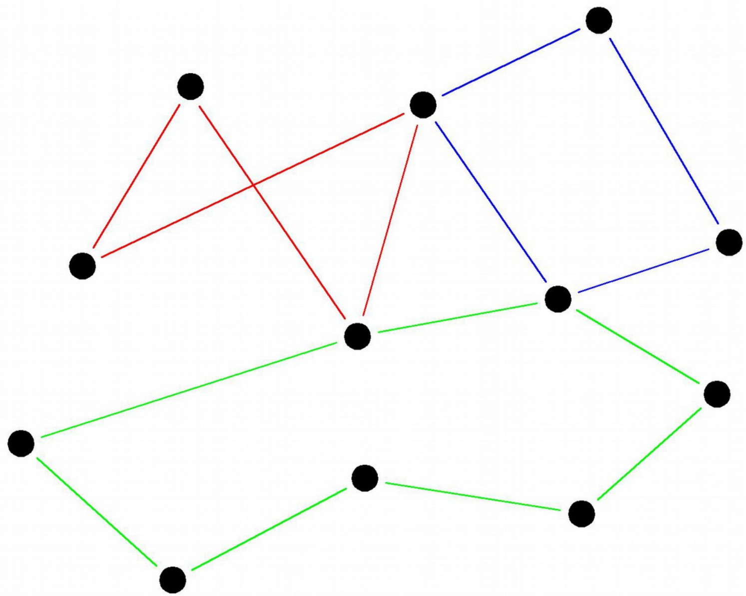
Graf $\mathbf{G} = (V, E)$ jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy jest spójny i stopień każdego wierzchołka jest parzysty.

Twierdzenie to jest nie tylko ładną charakterystyką grafów eulerowskich, ale umożliwia prostą i szybką weryfikację omawianej własności.



**Wniosek**

Graf spójny jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy rodzinę jego krawędzi da się podzielić na rozłączne krawędziowo cykle.



**Grafy jednokreślne**

Graf jednokreślny (tzn. taki, który można narysować bez odrywania ołówka i rysując każdą krawędź dokładnie raz) to graf posiadający marszrutę przechodzącą dokładnie raz przez każdą krawędź.

**Wniosek**

Graf $\mathrm{G} = (V, E)$ jest jednokreślny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spójny i jego wszystkie wierzchołki, poza co najwyżej dwoma, mają parzysty stopień.

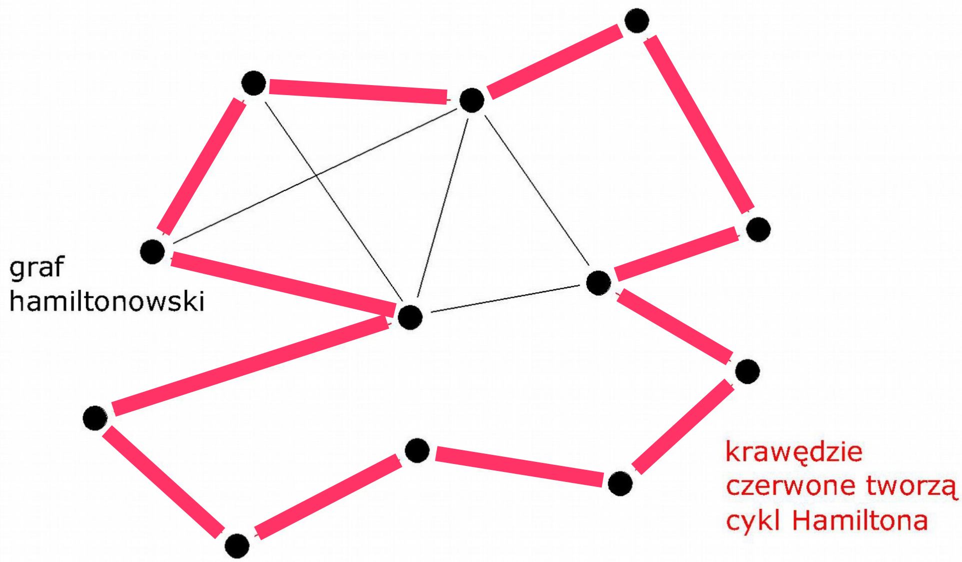
# Grafy hamiltonowskie

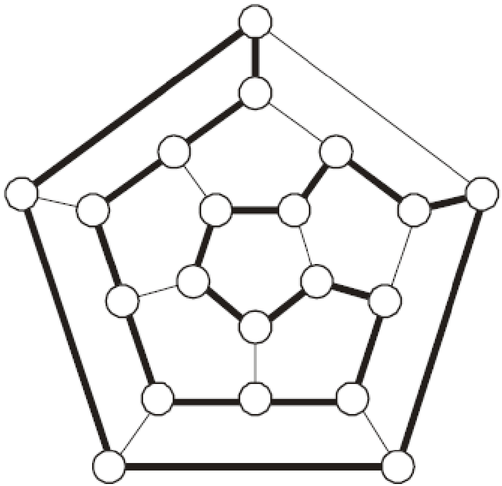
Inny, ciekawy problem można przedstawić na przykładzie firmy rozwożącej przesyłki. Dotyczy on pracy kuriera mającego rozwieść przesyłki do odbiorców, w ten sposób by odwiedzić każdego klienta jedynie raz, a na końcu wrócić do siedziby firmy.

**Cykl Hamiltona** to marszruta zamknięta odwiedzająca każdy wierzchołek dokładnie raz.

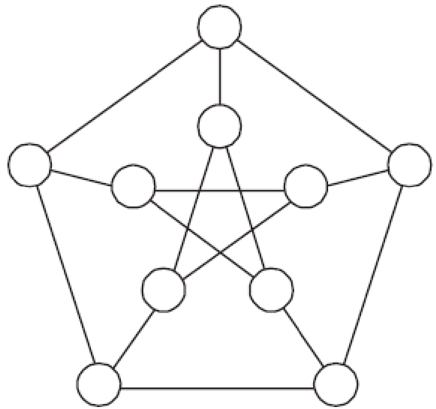
**Graf hamiltonowski** to graf posiadający cykl Hamiltona.

**Ścieżka Hamiltona** to marszruta przechodząca przez wszystkie wierzchołki, każdy odwiedzając jedynie jeden raz.


graf
hamiltonowski
krawędzie
czerwone tworzą
cykl Hamiltona



graf dwunastościanu jest hamiltonowski



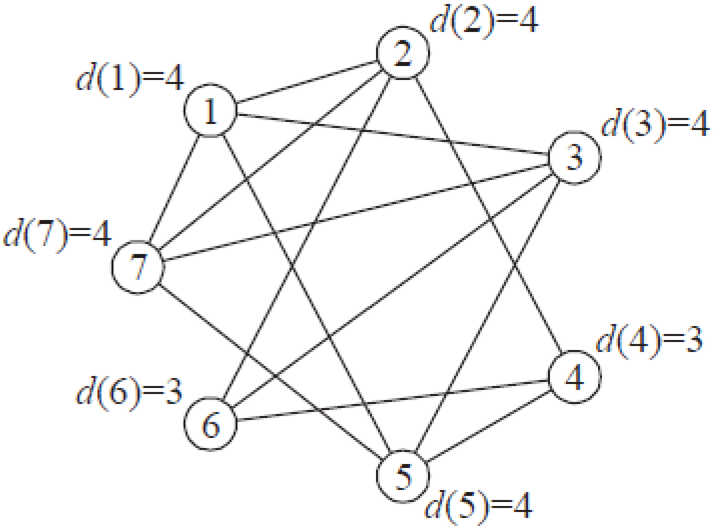
graf Petersena nie jest hamiltonowski

www.ibspan.waw.pl/~sikorski/md/md_p06.pdf

W odróżnieniu od grafów eulerowskich, grafy hamiltonowskie nie posiadają prostej i szybkiej w użyciu charakteryzacji. Nie znana jest żadna metoda, pozwalająca szybko (tzn. w czasie wielomianowym) stwierdzić czy dany graf jest hamiltonowski. Nie udowodniono również, że nie ma takiego algorytmu. Problem jest więc otwarty!

Są natomiast znane pewne warunki wystarczające na to, by graf był hamiltonowski, np.

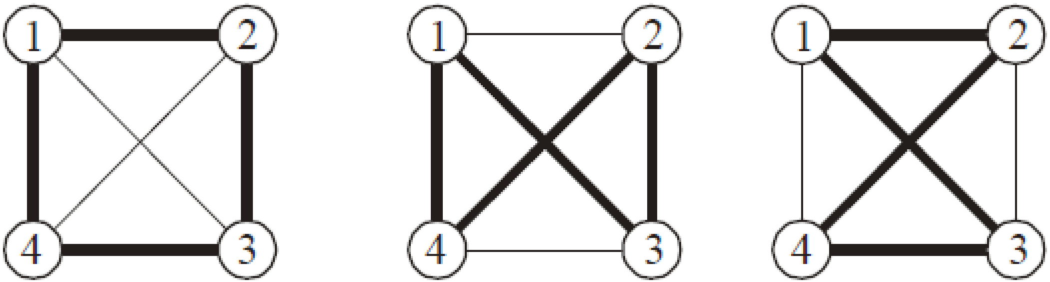
- Graf prosty $\mathbf{G} = (V, E)$, w którym każdy wierzchołek ma stopień co najmniej $|V|/2$ jest hamiltonowski.
- Jeśli w grafie prostym $\mathbf{G} = (V, E)$ o co najmniej 3 wierzchołkach dowolne dwa niesąsiednie wierzchołki *v* i *w* spełniają nierówność $\deg v + \deg w \geq |V|$, to graf $\mathbf{G}$ jest hamiltonowski.




www.ibspan.waw.pl/~sikorski/md/md_p06.pdf

**Twierdzenie**

Graf pełny $K_n$ jest hamiltonowski dla każdego n>2 i zawiera $\frac{(n-1)!}{2}$ cykli Hamiltona.




www.ibspan.waw.pl/~sikorski/md/md_p06.pdf

# Grafy planarne

**Graf płaski** to para $\overline{\mathrm{G}} = (\overline{V}, \overline{E})$, gdzie: $\overline{V}$ jest jakimś zbiorem punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, $\overline{E}$ jest zbiorem nie przecinających się odcinków lub łuków w $R^2$ o końcach w zbiorze $\overline{V}$.

**Graf planarny** to graf, który jest prezentowalny jako graf płaski.

Uwaga: graf płaski jest zbiorem punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ i zbiorem nie przecinających się odcinków lub łuków łączących te punkty. A zatem jest to RYSUNEK! Natomiast graf planarny to graf, który jest prezentowalny jako graf płaski.

**Grafy $K_5$ i $K_{3,3}$ nie są planarne.**

## Homeomorfizm

Graf $\mathbf{G}_1$ jest ***homeomorficzny*** z grafem $\mathbf{G}_2$, jeśli jeden otrzymamy z drugiego poprzez wykonanie skończenie wielu poniższych operacji:

- Dodawanie wierzchołków stopnia dwa na krawędzi.
  Jeśli $uw \in \mathsf{E}(\mathbf{G}_1)$ oraz $x \notin \mathsf{V}(\mathbf{G}_1)$, to operacja ta zastępuje graf $(\mathsf{V}(\mathbf{G}_1), \mathsf{E}(\mathbf{G}_1))$ grafem $(\mathsf{V}(\mathbf{G}_1) \cup \{x\}, \mathsf{E}(\mathbf{G}_1) \cup \{ux, xw\} - \{uw\})$.

- Usuwanie wierzchołków stopnia dwa.
  Jeśli $x \in \mathsf{V}(\mathbf{G}_1)$ ma jedynie dwóch sąsiadów $u, w$, to operacja ta zastępuje graf $(\mathsf{V}(\mathbf{G}_1), \mathsf{E}(\mathbf{G}_1))$ grafem $(\mathsf{V}(\mathbf{G}_1) - \{x\}, \mathsf{E}(\mathbf{G}_1) \cup \{uw\} - \{ux, xw\})$.

**Twierdzenie Kuratowskiego**

Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy żaden jego podgraf nie jest homeomorficzny z $K_5$ ani z $K_{3,3}$.

Inna charakterystyka grafów planarnych odwołuje się do znanego nam już pojęcia ściągalności, lub grafu ilorazowego:

**Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu ściągalnego do $K_5$ lub $K_{3,3}$.**

## Ściany

W grafach płaskich poza wierzchołkami oraz krawędziami można rozważać również ściany, czyli obszary płaszczyzny otoczone krawędziami i nie zawierające krawędzi. Formalnie **ściana** w grafie płaskim $\mathbb{G}$ to zbiór punktów płaszczyzny, które da się połączyć krzywą nieprzecinającą żadnej krawędzi.

Wszystkie grafy płaskie mają dokładnie jedną **ścianę nieskończoną**. Zauważmy, że las jest grafem planarnym, ale w żadnej reprezentacji płaskiej nie posiada **ścian ograniczonych**. Tak więc posiada w ogóle tylko jedną ścianę.

## Twierdzenie

W grafie płaskim $\mathbb{G} = (V, E)$ o $f$ ścianach i $k \geq 1$ składowych spójnych zachodzi $|V| - |E| + f = k + 1$.

# Kolorowanie grafów

Problem kolorowania polega na tym, by przypisać wierzchołkom grafu różne kolory w taki sposób, by każde dwa sąsiednie wierzchołki miały inne kolory.

**Kolorowanie** grafu $\mathbf{G} = (V, E)$ to funkcja $c : V \longrightarrow \mathbb{N}$ taka, że $c(v) \neq c(w)$ ilekroć $vw$ jest krawędzią grafu $\mathbf{G}$.

Kolorowanie grafu $\mathbf{G}$ na *k* kolorów wyznacza rozbicie zbioru $V$ na sumę rozłączną $V = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_{k-1}$ jednobarwnych zbiorów $V_i$, przy czym każdy graf indukowany postaci $\mathbf{G}|_{V_i}$ jest antykliką. Na odwrót, takie rozbicie $V = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_{k-1}$ pozwala na pokolorowanie grafu $\mathbf{G}$ na *k* kolorów.

**Graf *k*-kolorowalny** (*k*-barwny) to graf dający się pokolorować *k* barwami.

**Liczba chromatyczna** grafu, $\chi(\mathbf{G})$, to najmniejsza liczba barw, którymi można pokolorować graf $\mathbf{G}$.

**Optymalne kolorowanie** grafu $\mathbf{G}$ to kolorowanie używające dokładnie $\chi(\mathbf{G})$ kolorów.

**Oszacowania**

$\omega \leq \chi$(G) gdzie $\omega$ jest rozmiarem maksymalnego podgrafu pełnego (kliki)

$\chi$(G) $\leq \Delta$+1 gdzie $\Delta$ jest maksymalnym stopniem wierzchołka w G

**Obserwacja**

Graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy jest $2$-kolorowalny.

**Twierdzenie (1890)**

Każdy graf planarny jest 5-kolorowalny.

**Twierdzenie (1976)**

Każdy graf planarny jest 4-kolorowalny.

# MAPY

**Zbiór rozspajający** wierzchołki $u$, $v$ to zbiór krawędzi $F \subseteq E$ taki, że każda droga z $u$ do $v$ zawiera jakąś krawędź z $F$.

Rozcięcie wierzchołków $u$, $v$ to zbiór rozspajający wierzchołki $u$, $v$, którego żaden podzbiór właściwy nie rozspaja $u$ z $v$.

Zbiór krawędzi $F$ będziemy nazywać **rozcięciem**, jeśli $F$ jest rozcięciem jakichś dwu wierzchołków $u$, $v$.

**Most** to taka krawędź $e$, że zbiór $\{ e \}$ tworzy rozcięcie.

**Mapa** to graf płaski nie zawierający mostów.

**Mapa ma *k*-kolorowalne ściany** jeśli jej ściany można pokolorować $k$ kolorami w ten sposób, by żadne dwie graniczące ze sobą ściany nie miały tego samego koloru. Innymi słowy, mapa M ma $k$-kolorowalne ściany, jeśli jej geometrycznie dualny graf M* jest $k$ kolorowalny.

**Dwa twierdzenia o kolorowaniu**

Mapa M ma 2-kolorowalne ściany wtedy i tylko wtedy, gdy graf M jest eulerowski.

Każda mapa ma 4-kolorowalne ściany.

______________________________

J. Grygiel: *Wprowadzenie do matematyki dyskretnej.* AOW EXIT 2007

www.mini.pw.edu.pl/MiNIwyklady

# Zadania

Czy istnieje graf eulerowski (hamiltonowski) który ma

a) nieparzystą liczbę wierzchołków i nieparzystą liczbę krawędzi?

b) nieparzystą liczbę wierzchołków i parzystą liczbę krawędzi?

c) parzystą liczbę wierzchołków i nieparzystą liczbę krawędzi?

d) parzystą liczbę wierzchołków i parzystą liczbę krawędzi?

Znajdź lub uzasadnij, że nie istnieje graf który

a) nie ma cyklu Eulera i nie ma cyklu Hamiltona;

b) ma cykl Eulera i nie ma cyklu Hamiltona;

c) ma cykl Hamiltona i nie ma cyklu Eulera;

d) ma cykl Eulera i ma cykl Hamiltona.