Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2019
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

10/14

Zbiory przeliczalne

Przyjmujemy, że $\mathbb{Z}_n$ = {0, 1, 2, 3, … n-1} dla *n*>0 oraz $\mathbb{Z}_n$=∅ przy n=0.
Zbiór skończony to zbiór bijektywny z pewnym zbiorem postaci $\mathbb{Z}_n$.
Zbiór nieskończony to zbiór, który nie jest skończony.

Liczba elementów skończonego zbioru *X* to jedyna liczba naturalna *n* taka, że istnieje bijekcja z $\mathbb{Z}_n$ w *X*. Liczbę te oznaczamy przez |*X*|.
Oczywiście $|\mathbb{Z}_n| = n$.

Zbiór przeliczalny to zbiór skończony lub bijektywny z $\mathbb{N}$.

Zbiór pusty jest przeliczalny, bo jest skończony. Zbiór liczb parzystych jest przeliczalny, bo $f(x) = 2x$ jest bijekcją $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{P}$. Zbiór liczb całkowitych jest przeliczalny, bo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{dla parzystych } x, \\ \frac{-1-x}{2}, & \text{dla nieparzystych } x, \end{cases}$$

jest bijekcją z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{Z}$.

3 zasady zliczania

Zaczynamy od 3 zasad ogólnych: dodawania, włączania-wyłączania oraz mnożenia.

ZASADA DODAWANIA

Dla skończonych i rozłącznych zbiorów *A* i *B* mamy $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Dla zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ skończonych i parami rozłącznych mamy $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n|$.

ZASADA WŁĄCZANIA I WYŁĄCZANIA

Dla zbiorów skończonych $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ zachodzi

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

$$\begin{aligned}
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots \qquad + |A_{n-2}| + |A_{n-1}| + |A_n| \\
&- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots \qquad - |A_{n-2} \cap A_n| - |A_{n-1} \cap A_n| \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots \qquad + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
&- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \ldots \qquad - |A_{n-3} \cap A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
&+ \ldots \\
&(-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|
\end{aligned}$$

Lemat

W szczególności, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, o ile tylko *A*, *B* są skończone.

Przykład

W czasie przyjęcia, na którym było 17 osób, 10 osób poprosiło o kieliszki do wina czerwonego i 10 osób poprosiło o kieliszki do wina białego. Ile osób otrzymało oba kieliszki?

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$17 = 10 + 10 - x$

$x = 3$

Przykład

W czasie przyjęcia, na którym było 17 osób, 10 osób poprosiło o kieliszki do wina czerwonego, 10 osób poprosiło o kieliszki do wina białego, a 4 osoby o kieliszki do koniaku. Przy 2 osobach stały trzy kieliszki. Ile osób otrzymało dokładnie jeden kieliszek?

$|C \cup B \cup K| = |C| + |B| + |K| - |C \cap B| - |B \cap K| - |C \cap K| + |C \cap B \cap K|$

$17 = 10 + 10 + 4 - |C \cap B| - |B \cap K| - |C \cap K| + 2$

$17 = 26 - |C \cap B| - |B \cap K| - |C \cap K|$

???

x – liczba osób, które mają kieliszki tylko do czerwonego i białego

y – liczba osób, które mają kieliszki tylko do tylko do białego i do koniaku

z – liczba osób, które mają kieliszki tylko do czerwonego i do koniaku

$17 = 26 - (2+x) - (2+y) - (2+z)$

$17 = 20 - (x+y+z)$

Zatem skoro 3 osoby mają po dokładnie dwa kieliszki, a w treści zadania podano, że 2 osoby mają po 3 kieliszki, to pozostałe 12 osób ma dokładnie po jednym kieliszku.

Dowód lematu

W czasie przyjęciaPonieważ trzy zbiory $A-B, A\cap B$ i $B-A$ są parami rozłączne i sumują się do $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$, to na mocy zasady dodawania mamy:

$$|A\cup B| = |(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)| = |A-B| + |A\cap B| + |B-A|$$

i stąd

$$\begin{aligned}
|A\cup B| + |A\cap B| &= |A-B| + |A\cap B| + |B-A| + |A\cap B| \\
&= (|A-B| + |A\cap B|) + (|B-A| + |A\cap B|) \\
&= |(A-B)\cup(A\cap B)| + |(B-A)\cup(A\cap B)| \\
&= |A| + |B|
\end{aligned}$$

ZASADA MNOŻENIA

Jeżeli mamy wybrać dwa różne obiekty: pierwszy spośród *m* obiektów, a drugi spośród *n* obiektów, to liczba możliwych wyborów jest równa $m \cdot n$.

Zasada ta mówi, że dla skończonych zbiorów X, Y mamy $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.
Przypomnijmy, że iloczyn kartezjański zbiorów X, Y to zbiór
$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. A zatem jest to liczba par (x, y).

Postać ogólna

Jeżeli $A_1, A_2, \ldots A_n$ są zbiorami skończonymi to

$$| A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n | = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n| .$$

[Dowód przez indukcję]

Przykład

Rozważmy świat, w którym mamy 12 kobiet i 15 mężczyzn, i w którym każda osoba wysyła osobie płci przeciwnej życzenia imieninowe (osobom tej samej płci nie wysyła życzeń). Ile kartek z życzeniami wysłano w ciągu roku?

Niech C i N będą zbiorami kobiet i mężczyzn. Każda kartka z życzeniami może być interpretowana jako uporządkowana para (c, n), gdzie $c \in C$, $n \in N$. Zatem liczba wysłanych życzeń to liczność zbioru $C \times N$ plus liczność zbioru $N \times C$ więc

$|C \times N| + |N \times C| = 2 \cdot |C| \cdot |N| = 2 \cdot 12 \cdot 15 = 2 \cdot 180 = 360.$

Zliczanie podzbiorów

Twierdzenie

Dla dowolnego skończonego zbioru *X* zachodzi $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

Definicja

Współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ to liczba *k*-elementowych podzbiorów zbioru *n*-elementowego, tzn. $\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(\mathbb{Z}_n)|$. Podzbiory te nazywamy kombinacjami.

Twierdzenie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Lematy

Dla $n \geq k \geq 0$ zachodzi równość $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Dla $n \geq 1$ zachodzi $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Komentarz

Wyrażenie $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ może być odczytane jako suma podzbiorów 0-elementowych, 1-elementowych, 2-elementowych, … , (*n*-1)-elementowych i *n*-elementowych.

Dla n≥k≥0 zachodzi równość $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Jak się to ma do trójkąta Pascala?

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

. . . . .

Przykład

Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Ile jest możliwych wyników, w których orzeł wypadł parzystą liczbę razy?

Niech $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Wynik będziemy reprezentować zbiorem $A \subset X$. Będzie to zbiór pozycji, na których występują jedynki w ciągu reprezentującym wynik eksperymentu (1 – orzeł, 0 –reszka). Na przykład $A=\{1,2,5,6\}$ odpowiada wynikowi 1100110000.

Gdy wypadną same jedynki, to $A = X$.

Gdy wypadnie 8 jedynek, to A jest 8-elementowym podzbiorem X.

Gdy wypadnie 6 jedynek, to A jest 6-elementowym podzbiorem X.

Gdy wypadną 4 jedynki, to A jest 4-elementowym podzbiorem X.

Gdy wypadnie 2 jedynki, to A jest 2-elementowym podzbiorem X.

Gdy wypadnie 0 jedynek, to A jest zbiorem pustym.

Możliwych eksperymentów, gdzie wypadnie parzysta liczba jedynek jest zatem:

$$1 + \binom{10}{8} + \binom{10}{6} + \binom{10}{4} + \binom{10}{2} + 1 = 1 + 45 + 210 + 210 + 45 + 1 = 512$$

A ile jest możliwych wyników? Jest ich $2^{10} = 1024$.

Przykład

Ile jest różnych liczb naturalnych mniejszych od 2^n, które w zapisie dwójkowym mają dokładnie k jedynek?

Liczby te w zapisie dwójkowym, to ciągi n-elementowe $a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0$, a każdy taki ciąg można traktować jako funkcję charakterystyczną zbioru A zawartego w zbiorze $\{0, 1, \ldots n\text{-}1\}$ taką, że $i \in A$ wttw $a_i=1$.

Zbiór A przechowuje informację, na jakich pozycjach znajdują się jedynki. Np. dla $n=7$ liczba $75_{10}=1001101_2$ więc $A=\{6,3,2,0\}$. Odwzorowanie, które liczbie naturalnej przyporządkowuje zbiór pozycji na których występują jedynki w zapisie dwójkowym tej liczby, czyli odpowiedni zbiór A, jest bijekcją. Liczymy więc k-elementowe podzbiory zbioru $\{0,1,\ldots n\text{-}1\}$.

Jest ich $\binom{n}{k}$.

Przykład

Ful w pokerze to układ 5 kart, w których występują tylko karty o dwóch różnych wysokościach x i y: dokładnie 3 karty o wysokości x i 2 karty o wysokości y. Oznaczmy typ fula przez (x,y).

Ile jest różnych układów typu $(7,D)$?

Ile jest różnych typów fuli?

Dla układu typu (7,*D*) trzy siódemki są wybrane z czterech, a dwie damy – też z czterech.

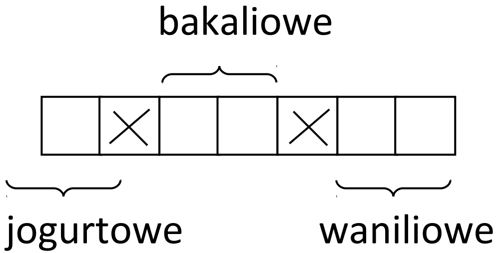
Więc mamy $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}$ = 24 możliwości.

Typ fula ustalimy wybierając jedną z 13 wysokości kart (oznaczmy ją jako *x*), a następnie jedną z pozostałych 12 (oznaczmy ją jako *y*), czyli różnych typów fuli jest $13 \cdot 12 = 156$.

Przykład

W lodziarni są trzy rodzaje lodów: jogurtowe, bakaliowe i waniliowe. Sprzedaje się desery po 5 kulek. Na ile sposobów można skomponować deser (kolejność kulek nie jest ważna)?

Mamy liczby naturalne $j \le 5$, $b \le 5$, $w \le 5$, $j+b+w=5$. Każdy taki zestaw można zakodować w 7 kratkach, z których dwie muszą być skreślone. Różnych deserów będzie więc tyle, na ile sposobów można skreślić dwie kratki z siedmiu, czyli tyle, ile różnych podzbiorów dwuelementowych w zbiorze 7-elementowym, czyli $\binom{7}{2} = 21$.



Przykład

Wyobraźmy sobie, że znajdujemy się w mieście zbudowanym na planie prostopadle przecinających się ulic. Znajdujemy się w punkcie A i chcemy dojść – najkrótszą drogą – do punktu B leżącego 3 przecznice na północ i 6 przecznic na wschód. Łatwo zauważyć, że jest wiele najkrótszych dróg prowadzących z A do B. Dla przykładu: możemy pójść 3 razy na północ i potem cały czas na wschód, ale także możemy iść najpierw 6 razy na wschód i dopiero wtedy skręcić na północ.

Ile jest najkrótszych dróg z A do B?

Zauważmy, że każda najkrótsza droga biegnie przez dokładnie 9 skrzyżowań (licząc skrzyżowanie w punkcie A i nie licząc skrzyżowania w punkcie B). Na każdym takim skrzyżowaniu musimy podjąć decyzję, czy pójść na wschód czy na północ, przy czym musimy iść dokładnie 3 razy na północ i dokładnie 6 razy na wschód.

Zatem liczba najkrótszych dróg z A do B to liczba wyborów spośród 9 skrzyżowań, trzech, na których pójdziemy na północ (na pozostałych skrzyżowaniach musimy iść na wschód).
Możemy też jako rozwiązanie policzyć jako liczbę wyborów spośród 9 tych 6 skrzyżowań, na których pójdziemy na wschód (wtedy na pozostałych trzech musimy iść na północ.

Ostatecznie liczba ta wynosi $\binom{9}{3} = \binom{9}{6} = 84$.

Przykład

Ile rozwiązań ma równanie $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$,
gdzie x_i liczbami naturalnymi?

Użyjmy kratki rozważanej w poprzednim przykładzie, ale w ustalonym rozmiarze 4 na 7 kwadratów. Połączmy łamaną lewy dolny róg z prawym górnym w ten sposób, że na każdym skrzyżowaniu można iść na wschód lub na północ. Skrzyżowań, na których mamy dokonać wyboru jest 7+4. Wybór drogi to wybór skrzyżowań, na których skręcimy na północ. Każda taka droga będzie mieć co najwyżej 5 odcinków poziomych, a suma długości tych odcinków będzie wynosić 7.

Odcinki poziome mogę leżeć na poziomie 0, 1, 2, 3, 4 i 5. Jeśli długości tych odcinków oznaczymy odpowiednio przez x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, to każda taka droga (łamana) na kratce ustala pewne rozwiązanie naszego równania, i każde rozwiązanie równania wyznacza dokładnie jedna drogę (łamaną).

Zatem istnieje $\binom{7+4}{4} = 330$ rozwiązań naszego równania.

Przykład

Rozważmy znów kratkę, tym razem o wymiarach 6x6 kwadratów. Policzmy na ile sposobów można w jej wnętrzu narysować prostokąt?

	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X

Zauważmy, że każdy taki prostokąt jest jednoznacznie wyznaczony przez dwie linie poziome (spośród 7) oraz dwie linie pionowe (znów spośród 7). I na odwrót: dowolny wybór linii pozwoli nam jednoznacznie narysować prostokąt w kratce.

Poziome linie możemy wybrać na $\binom{7}{2}$ sposobów i pionowe linie na tyle samo sposobów. Zatem prostokąt w kratce 6x6 możemy narysować na dokładnie $\binom{7}{2}^2 = 441$ sposobów.

Zliczanie funkcji

Twierdzenie o liczbie funkcji

Zbiór funkcji postaci $X \longrightarrow Y$ oznaczamy przez Y^X. Dla skończonych zbiorów X, Y mamy wówczas: $\left|Y^X\right| = |Y|^{|X|}$.

Dowód

Niech $|X| = n$, $|Y| = m$. Zbiór funkcji z X w Y jest równoliczny z Y^n, bo każdą funkcję f można reprezentować jako ciąg $(f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n))$.

Na podstawie Zasady Mnożenia otrzymujemy

$$|\underbrace{Y \times Y \times \ldots \times Y}_{n}| = \underbrace{|Y| \cdot |Y| \cdot \ldots \cdot |Y|}_{n} = m^n = |Y|^{|X|}$$

Twierdzenie o liczbie injekcji

Liczba injekcji ze zbioru skończonego X (n-elementowego) w zbiór skończony Y (m-elementowy) wynosi (przy $m \geq n$):

$$|Y|! \,/\, (|Y| - |X|)! = m! \,/\, (m-n)! = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = m^{\underline{n}}$$

(dolna potęga krocząca)

Twierdzenie o liczbie bijekcji

Liczba bijekcji pomiędzy skończonymi zbiorami X i Y, gdzie $|X| = |Y| = n$ wynosi $n^{\underline{n}} = n!$.

Przykład (http://wazniak.mimuw.edu.pl)

Trzech kolegów: Bartek, Paweł i Piotrek spotkali się w pubie po zdanym egzaminie. Okazało się, że jest pięć marek piwa do wyboru. Na ile sposobów mogą oni wypić pierwszą kolejkę?

Każdy wybór marki piwa przez 3 osoby możemy interpretować jako funkcję ze zbioru {*Bartek*, *Paweł*, *Piotrek*} w pięcioelementowy zbiór marek piwa. A więc istnieje $5^3 = 125$ sposobów spożycia pierwszej kolejki. I tyleż sposobów dla każdej następnej.

Przykład

Kod PIN jest kodem autoryzującym właściciela karty bankomatowej. Składa się on z 4 cyfr dziesiętnych.

a) Ile jest różnych kodów PIN?

b) Ile jest takich PIN-ów, w których żadna cyfra się nie powtarza?

c) Ile jest takich PIN-ów, w których dokładnie jedna cyfra powtarza się dwukrotnie?

a)

Każdy kod PIN to funkcja z czteroelementowego zbioru pozycji {0, 1, 2, 3} w dziesięcioelementowy zbiór cyfr {0, 1, …, 9}. Kodów PIN jest zatem $10^4 = 10000$.

b)

Każdy PIN z niepowtarzającymi się cyframi to injekcja z 4-elementowego zbioru pozycji {0, 1, 2, 3} w 10-elementowy zbiór cyfr {0, 1, …, 9}. Zatem jest ich dokładnie $10^{\underline{4}} = 10\cdot9\cdot8\cdot7 = 5040$.

c)

Każdy taki PIN ma 3 różne cyfry . . .

Przykład

Na kurs tańca uczęszcza pięciu chłopaków i pięć dziewcząt. Większość kroków tanecznych ćwiczy się parami. Dla urozmaicenia pary często się zmieniają. Na ile sposobów może być wykonany dobór par do jednego tańca?

Niech C będzie zbiorem chłopaków, a D zbiorem dziewcząt. Wiemy, że $|C|=|D|= 5$. Matematycznym modelem doboru par do tańca jest bijekcja z C do D. Zatem możliwych wyborów jest tyle samo co bijekcji pomiędzy 5-elementowymi zbiorami, czyli $5! = 120$.