Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2019

andrzej.lachwa@uj.edu.pl

12A/14

Współczynniki dwumianowe

Przypomnijmy: współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ to liczba *k*-elementowych podzbiorów zbioru *n*-elementowego, tzn. $\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(\mathbb{Z}_n)|$. Nazwa "współczynniki dwumianowe" bierze się stąd, że pojawiają się one w rozwinięciu dwumianu $(x+y)^n$.

Twierdzenie o liczbie podzbiorów

Gdyby była istotna kolejność elementów w podzbiorach, to mielibyśmy do czynienia z *k*-elementowymi wariacjami, więc byłoby ich $n^{\underline{k}}$. Jednak każdy *k*-elementowy podzbiór można uporządkować na *k*! sposobów, zatem mamy

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Lematy

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, dla n≥k≥0,

$\binom{n}{k} = 0$, dla $k > n$,

$\binom{n}{1} = n$, dla $n > 0$,

Reguła symetrii

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, dla $n \geqslant k \geqslant 0$

REGUŁA DODAWANIA

Reguła ta stanowi fundament dla rekurencyjnej procedury obliczania współczynników dwumianowych:

dla $0 < k \leqslant n$ **mamy** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Dowody lematów

Pierwszy punkt jest natychmiastową konsekwencją faktu, że dowolny zbiór *n*-elementowy ma tylko jeden 0-elementowy podzbiór – podzbiór pusty i tylko jeden podzbiór *n*-elementowy – cały zbiór.

Drugi punkt jest oczywisty, jako że zbiór *n*-elementowy nie może mieć podzbiorów o *k* elementach, gdy *k*>*n*.

Dla dowodu trzeciego punktu, zauważmy jedynie, że podzbiorów jednoelementowych jest dokładnie tyle ile elementów w zbiorze.

Dowód reguły symetrii

Wreszcie dla dowodu ostatniego punktu załóżmy, że $|X| = n \geqslant k \geqslant 0$. Wtedy funkcja $\mathcal{P}_k(X) \ni A \mapsto X \setminus A \in \mathcal{P}_{n-k}(X)$ jest bijekcją. Innymi słowy, zamiast wybierać *k* elementów ze zbioru *X* można odrzucić *n*–*k* elementów.

Dowód reguły dodawania (interpretacja kombinatoryczna)

Załóżmy, że $|Z| = n$. Wtedy, po usunięciu ze zbioru *Z* elementu *a* dostajemy (*n*–1)-elementowy zbiór *Z'*. Oczywiście wszystkie *k*-elementowe podzbiory zbioru *Z* można podzielić na dwa typy: albo mają w sobie element *a*, albo go nie mają.

Każdy podzbiór pierwszego typu, czyli $A \in \mathcal{P}_k(Z)$ takie, że $a \in A$ jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje pozostałe (*k*–1)-elementów ze zbioru *Z'*. Takich możliwości jest $\binom{n-1}{k-1}$.

W drugim przypadku są to *k*-elementowe podzbiory (*n*–1)-elementowego zbioru *Z'*. Jest więc ich dokładnie $\binom{n-1}{k}$.

A zatem $\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(Z)| = |\mathcal{P}_k(Z')| + |\mathcal{P}_{k-1}(Z')| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Trójkąt Pascala bazuje na regule dodawania i ustawia współczynniki w następujący sposób:

- wiersze trójkąta numerowane są kolejnymi liczbami naturalnymi 0,1...,
- w każdym z wierszy trójkąta występuje dokładnie $n+1$ liczb i są to kolejno $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$.

Przesunięcie w wierszach, pozwala wyliczyć $\binom{n}{k}$ jako sumę $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ dwu liczb stojących bezpośrednio nad $\binom{n}{k}$.

Reguła sumowania po górnym indeksie (sumowanie po przekątnej trójkąta Pascala)

Dla $n, k \in \mathbb{N}$ mamy $$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

1

1 **1**

1 **2** 1

1 **3** 3 **1**

1 **4** 6 **4** 1

1 **5** 10 **10** 5 1

1 **6** 15 **20** 15 6 1

1 7 **21** 35 **35** 21 7 1

Reguła sumowania równoległego (sumowanie po drugiej przekątnej)

Dla $n, k \in \mathbb{N}$ mamy: $$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}.$$

1

1 1

1 2 1

1 **3** 3 1

1 4 **6** 4 1

1 **5** 10 **10** 5 1

1 6 **15** 20 **15** 6 1

1 7 **21** 35 **35** 21 7 1

Tożsamość Cauchy'ego (splot Vandermonde'a)

Dla liczb naturalnych m, n, k mamy: $$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

Twierdzenie o dwumianie (wyjaśnia pochodzenie nazwy)

Dla $x, y \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ mamy $$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

Przykłady

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Lemat 1

Dla dowolnego *n*≥0 mamy $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$.

Lemat 2

Dla dowolnego *n*≥0 mamy $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Lemat 3

Dla dowolnego *n*≥0 mamy $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0^n$.

(Uwaga: $\binom{0}{0} = 1 = 0^0$)

Zadania

1. Policz 11^4 wykorzystując współczynniki dwumianowe.

2. Niech $n>0$, $0 \le k \le n$. Dla jakich k wartość $\binom{n}{k}$ jest największa?

3. Udowodnij własność sześciokąta

$$\binom{n-1}{k-1}\cdot\binom{n}{k+1}\cdot\binom{n+1}{k}=\binom{n-1}{k}\cdot\binom{n+1}{k+1}\cdot\binom{n}{k-1}$$

Sumy częściowe

Umiemy już policzyć wartość sumy całego wiersza w trójkącie Pascala i wartość naprzemiennej sumy całego wiersza. W praktyce często pojawia się konieczność sumowania tylko pewnego fragmentu takiego wiersza. Do tego pomocne mogłyby być sumy postaci:

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{m} \qquad (*)$$

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^m \binom{n}{m} \qquad (**)$$

dla $0 \leqslant m < n$, gdyby miały postać zwartą! Niestety nie jest znana żadna zwarta postać (*).

Druga suma, czyli naprzemienna częściowa suma (**) wiersza trójkąta Pascala **ma postać zwartą**. Wyprowadzenie takiej postaci odwołuje się do uogólnienia współczynnika dwumianowego na dowolne rzeczywiste indeksy górne, i dowolne całkowite indeksy dolne. Pomijamy to wyprowadzenie i przedstawiamy wzór na postać zwartą dla liczb naturalnych:

$$\sum_{i \leqslant m} (-1)^i \binom{r}{i} = (-1)^m \binom{r-1}{m}.$$

dla naturalnych *r*, *m*: 0≤*m*≤*r*.

Zadanie

Policz na dwa sposoby sumę częściową dla m=2.

Mamy również wzór na zwartą postać modyfikacji sumy (**) polegającej na wymnożeniu każdego składnika przez jego odległość od środka trójkąta Pascala.

Dla $m, n \geqslant 0$ zachodzi $\sum_{i=0}^{m} (\frac{n}{2} - i) \cdot \binom{n}{i} = \frac{m+1}{2} \binom{n}{m+1}$

Np. dla *n*=6 i *m*=4 mamy sumę:

$$3 \cdot \binom{6}{0} + 2 \cdot \binom{6}{1} + 1 \cdot \binom{6}{2} + 0 \cdot \binom{6}{3} + (-1) \cdot \binom{6}{4} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 15 - 1 \cdot 15 = 15$$

oraz postać zwartą $\frac{4+1}{2} \cdot \binom{6}{5} = \frac{5}{2} \cdot 6 = 15$

Reguła odwracania

Dla funkcji $f, g\colon Z \to R$ zachodzi

$$f(n) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n}{i} (-1)^i g(i)$$ wtedy i tylko wtedy, gdy $$g(n) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n}{i} (-1)^i f(i).$$

Zadania

Obliczyć $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{k}$.

Wykazać, że $\sum_{k} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Zadania

1. W kolejce stoi *n* studentów. Wchodzą oni na egzamin w *k* niepustych grupach. Na ile sposobów można utworzyć te grupy?

2. Ile rozwiązań w liczbach naturalnych ma równanie $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$?

3. Na ile sposobów można ustawić n osób w kolejkach do k ponumerowanych okienek pocztowych, przy czym dopuszczamy puste kolejki (zamknięte okienka).

4. Ile jest rosnących funkcji odwzorowujących zbiór {1,2…k} w zbiór {1,2… n}? A ile jest takich funkcji niemalejących?

5. Na ile sposobów można rozmieścić 6 przedmiotów w trzech różnych pojemnikach tak, by w każdym były dokładnie dwa przedmioty?

UWAGA: dowody, które nie obowiązują do egzaminu

temat 4 – dowód równoważności ZIM, ZIZ, ZMin i ZMax

temat 5 – dowód tw. Eulera-Bineta (wzór "z pierwiastkami z liczby 5" na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego) i dowód wniosku Keplera na granicę ilorazów elementów ciągu Fibonacciego

temat 6 – dowód tw Euklidesa o znajdowaniu liczb całkowitych *x, y* takich że *ax+by=NWD(a,b)* oraz analiza czasu działania odpowiedniego algorytmu i dowód słabego twierdzenia o liczbach pierwszych

temat 12 – dowód tw o liczbie permutacji danego typu, dowód tw o permutacjach tego samego typu, dowód obserwacji o permutacji przedstawialnej jako złożenie transpozycji i dowód obserwacji o liczbach permutacji parzystych i nieparzystych

temat 13 – dowód obserwacji o związku liczb Stirlinga dla cykli z liczbami harmonicznymi