Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2019
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

9A/14

Zasada Dirichleta

1 ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA (1ZSD)

Jeśli n obiektów jest rozmieszczonych w m szufladach i $n > m > 0$, to istnieje szuflada z przynajmniej dwoma obiektami.

2 ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA (2ZSD)

Jeśli n obiektów jest rozmieszczonych w m szufladach i $n > m > 0$, to co najmniej jedna szuflada ma $\lceil n/m \rceil$ lub więcej elementów oraz co najmniej jedna szuflada ma $\lfloor n/m \rfloor$ lub mniej elementów.

Ta postać zasady mówi, że w zbiorze danych wszystkie wartości nie mogą leżeć równocześnie powyżej średniej ani równocześnie poniżej średniej.

Wniosek z 2ZSD

Jeżeli dana jest funkcja f: $X \to Y$, gdzie $|X|=n$, $|Y|=m$, $n > m > 1$ to istnieją y_1, y_2 takie, że $|f^{-1}(y_1)| \geq \lceil n/m \rceil$ oraz $|f^{-1}(y_2)| \leq \lfloor n/m \rfloor$.

Dowód 2ZSD

Zakładam, że każdy z podzbiorów ma mniej niż $\lceil n/m \rceil$ elementów, czyli co najwyżej $\lceil n/m \rceil - 1$ elementów. Wtedy cały zbiór ma ich co najwyżej $m \cdot (\lceil n/m \rceil - 1)$, czyli $n \leq m \cdot (\lceil n/m \rceil - 1)$, czyli $n/m + 1 \leq \lceil n/m \rceil$. Ale to jest sprzeczne z oczywistą własnością, że $x + 1 > \lceil x \rceil$ dla każdego x.

Dowód drugiej części przebiega analogicznie. Proszę go wykonać.

Dowód 1ZSD

Przy $n > m > 0$ wartość $\lceil n/m \rceil$ jest ≥ 2.

3 ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA (3ZSD)

Jeśli n obiektów rozmieszczonych jest w m szufladach i $n>mr$ dla pewnego naturalnego r, to istnieje szuflada z co najmniej $r+1$ obiektami.

Wniosek z 3ZSD

Jeżeli dana jest funkcja f: $X \to Y$, gdzie $|X|=n$, $|Y|=m$, oraz $n>mr$, dla pewnego naturalnego r, to co najmniej jeden ze zbiorów $f^{-1}(y)$ ma więcej niż r elementów.

Dowód 3ZSD

Z 2ZSD co najmniej jedna szuflada ma $\lceil n/m \rceil$ lub więcej elementów oraz $n>mr$, dla pewnego naturalnego r. Zatem $\lceil n/m \rceil \geq n/m > r$. Czyli szuflada ta ma co najmniej $r+1$ elementów.

4 ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA (4ZSD)

Niech X_1, X_2, … X_m będą podzbiorami n-elementowego zbioru X oraz niech każdy element z X należy do co najmniej t spośród zbiorów X_i. Wtedy średnia arytmetyczna liczb elementów zbiorów X_i wynosi co najmniej tn/m.

Dowód 4ZSD

Niech $P = \{(x, i): x \in X_i\}$. Zbiór P można rozpisać na dwa sposoby: jako suma zbiorów po i=1…m i jako suma zbiorów po $x \in X$.

$P = \{(x, 1): x \in X_1\} \cup \{(x, 2): x \in X_2\} \cup \ldots \cup \{(x, m): x \in X_m\}$ i wtedy $|P| = \sum_{i=1\ldots m} |X_i|$.

$P = \sum_{x \in X} \{(x, i): x \in X_i\}$ i wtedy $|P| \geq tn$.

Zatem średnia arytmetyczna $(1/m) \cdot \sum_{i=1\ldots m} |X_i| \geq tn/m$.

Przykład

Wśród mieszkańców Krakowa co najmniej dwie osoby mają tę samą liczbę włosów na głowie.

Liczba włosów na głowie człowieka nie przekracza pół miliona, natomiast liczba mieszkańców Krakowa przekracza osiemset tysięcy. Weźmy 500000 szufladek ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi od 0 do 499999 i wkładajmy do szufladki o danym numerze osoby, które mają taką liczbę włosów na głowie, jak numer szufladki. Ponieważ osób jest więcej niż szufladek, to z Zasady Szufladkowej wynika, że w jednej szufladce muszą znaleźć się co najmniej dwie osoby.

Przykład

W grupie 13 osób muszą być co najmniej dwie, które urodziły się w tym samym miesiącu.

Weźmy 12 szufladek z nazwami miesięcy i wkładajmy do nich osoby, które urodziły się w danym miesiącu. Ponieważ osób jest 13, a szufladek 12, to w jednej z nich muszą być co najmniej dwie osoby.

Przykład

Wybierzmy dowolnie 10 różnych liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ spośród $1, 2, 3, \ldots, 100$. Pokażemy, że w zbiorze $\{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$ można wybrać dwa rozłączne podzbiory, dające tę samą sumę liczb.

Szuflady poetykietujmy liczbami reprezentującymi możliwe sumy liczb w co najwyżej 10-cio elementowych podzbiorach zbioru {1, 2, …100}. Ponieważ największa możliwa taka suma to 91+92+…+100=955, to mamy 955 szuflad z etykietami: 0, 1, 2, …, 955. Z drugiej strony 10-elementowy zbiór $\{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$ ma $2^{10} = 1024$ podzbiory, więc muszą być dwa różne podzbiory zbioru $\{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$ o tej samej sumie.

Jak na razie takie podzbiory nie muszą być rozłączne, ale jeśli z obu z nich usuniemy wspólne liczby, to pozostałe dalej będą dawać takie same sumy, a powstałe zbiory będą już rozłączne.

Przykład

Jeżeli na 3 półkach znajduje się 11 książek, to …
... na jednej z nich musi być nie więcej niż 3 książki, a na innej nie mniej niż 4 książki.

Przykład

Niech A będzie 9-elementowym podzbiorem {1, 2, … 30}. Należy pokazać, że w zbiorze A istnieją dwa różne podzbiory 4-elementowe o tej samej sumie elementów.

Po pierwsze, w *A* mamy $\binom{9}{4}$=126 różnych podzbiorów 4-elementowych. Po drugie, najmniejsza suma wynosi 1+2+3+4=10. Po trzecie, największa suma wynosi 27+28+29+30=114.

Możliwych jest więc 114–10+1=105 różnych sum. Ponumerujmy szuflady tymi sumami. Na mocy 2ZSD co najmniej jedna szuflada musi mieć co najmniej $\lceil 126/105 \rceil$ elementów, czyli co najmniej 2 elementy.

Przykład

W kwadracie o boku 2 umieścimy 5 punktów. Co najmniej dwa z nich są oddalone o nie więcej niż $\sqrt{2}$.

Dzielimy nasz kwadrat na cztery kwadraty o bokach 1 i przekątnych $\sqrt{2}$. Zgodnie z 1ZSD jeden z tych kwadratów musi zawierać dwa punkty, więc ich odległość nie jest większa od przekątnej kwadratu.

Przykład

Z grupy 21 posłów każdy uczestniczy w co najmniej dwóch komisjach śledczych. Powołano 7 komisji. Jaki nietrywialny wniosek można z tego wyprowadzić?

Z 4ZSD średnia liczebność komisji wynosi co najmniej $2 \cdot 21/7 = 6$.

Przykład

Jeśli 83 jabłka umieszczono w 9 skrzynkach, to jedna ze skrzynek zawiera co najmniej 10 jabłek, bo …

... $\lceil 83/9 \rceil = 10$.
Istnieje również skrzynka, która zawiera co najwyżej $\lfloor 83/9 \rfloor = 9$ jabłek.

Czy to prawda, że jeśli dwie skrzynki są puste to któraś ze skrzynek ma co najmniej 12 jabłek?

Jabłka są teraz rozmieszczone w 7 skrzynkach, więc istnieje skrzynka, która ma co najmniej $\lceil 83/7 \rceil =12$ jabłek.

Przykład

Ile co najwyżej razy można rzucić parą kostek bez otrzymywania dwukrotnie tej samej sumy oczek?

Szuflada oznacza wszystkie wyniki dające tę samą sumę oczek. Takich szuflad będzie od 2 do 12, czyli 11. Tylko ciąg po jednym elemencie z każdej szuflady daje zadany wynik. Dwunasty rzut trafi do jednej z szuflad, które już wystąpiły w ciągu.

Przykład

Wykazać, że jeśli 10 liczb naturalnych daje w sumie 101, to są wśród nich 3 liczby, których suma wynosi co najmniej 31.

I sposób

Ponumerujmy te liczby jako a_1, a_2, … a_{10}. Następnie wypiszmy 3 rzędy:

$a_1, a_2, \ldots a_8, a_9, a_{10}$

$a_2, a_3, \ldots a_9, a_{10}, a_1$

$a_3, a_4, \ldots a_{10}, a_1, a_2$

Suma tych 30 liczb wynosi 303. Jedna z 10 kolumn musi mieć sumę równą co najmniej sufit z 303/10 (czyli 31).

II sposób

Podzielmy 10 liczb na 5 par. Jedna z tych par musi mieć sumę co najmniej 21. Oznaczmy ją przez s. Z pozostałych 8 liczb jedna musi być równa co najmniej 1/8 ich sumy. Wtedy s+$\frac{1}{8}$ (101-s) = $\frac{7}{8}$s + $\frac{101}{8} \geq \frac{7}{8}21 + \frac{101}{8} = 31$