Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2019
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

Zadania 101-170

101. Oblicz postać zwartą symbolu $\left\{ {n \atop 4} \right\}$.

102. Udowodnij, że $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 1$

103. Ile może być 4-cyfrowych kodów PIN, w których nie powtarza się żadna cyfra?

104. Alfabet Morse'a składa się z dwóch znaków: kreski i kropki. Ilu znakowe alfabety możemy zakodować słowami alfabetu Morse'a o długości nie większej niż *k*? Policz dla *k*=5, 6, 7.

105. Udowodnij, że 2^n jest $O(n!)$.

106. Udowodnij, że $5n^4 + 7n^2 - 3n - 12$ jest $O(n^4)$

107. Co oznacza napis „$5n^6 + \ln(n) + O(n^4) = O(n^6)$” ?

108. Napisz tożsamość Couchyego dla współczynników dwumianowych i omów ją na przykładzie grupy *m* mężczyzn i *k* kobiet.

109. Ile jest różnych układów kart w pokerze określanych jako „kolor”?

110. Ile rozwiązań w dziedzinie naturalnej ma równanie $x_0+x_1+x_2+x_3+x_4=7$?

111. Policz $\sum_0^n 3x^{\underline{-3}}\delta x$.

112. Ile jest liczb naturalnych nie większych od 300, podzielnych przez 2 lub przez 3, lub przez 5 (wykorzystaj zasadę włączania i wyłączania)?

113. Ile transpozycji ma dowolna permutacja typu $[1^3\,2^2\,3^4\,4^1]$?

114. Co oznacza współczynnik $\binom{6}{0,3,0,0,4}$? Ile wynosi?

115. Osiemnaście osób uczestniczy w grze polegającej na wylosowaniu 2 kart z talii 52 kart. Każda osoba losuje karty z całej talii. Wynik losowania to suma uzyskanych punktów (za dwójkę mamy 2 punkty, za trójkę 3 punkty, itd., aż do dziesiątki za 10 punktów; za figury otrzymujemy także po 10 punktów). Wygrywają te osoby, które mają taki sam wynik. Czy zdarzy się gra w której nikt nie wygra (odpowiedź uzasadnij)? Jakie jest prawdopodobieństwo wyniku 20 punktów?

116. Jaka jest średnia liczba cykli permutacji zbioru 5-elementowego. Zanim zaczniesz, policz w pamięci jaka jest średnia liczba zeszytów przypadająca na plecak, jeżeli w 10 plecakach są po 2 zeszyty i w 20 plecakach po 3 zeszyty?

117. Policz czego jest więcej: (a) rozmieszczeń uporządkowanych 3 elementów w 4 pudełkach czy (b) 4 elementów w 3 pudełkach?

118. W sklepie 5 klientów i są 3 kasy. Jaka jest szansa, że osoba nr 4 będzie pierwsza przy kasie nr 2.

119. 52 kule (nierozróżnialne) wkładam do czapki i do skarpety. Na ile sposobów mogę to zrobić? A jeśli 52 kule (nierozróżnialne) wkładam do czapki i do dwóch skarpet (nierozróżnialnych), to na ile sposobów mogę to zrobić?

120. Policz różnicę z funkcji f(x) = $2^x \cdot x^2 - 3^x \cdot x^3$. Wynik przedstaw w najprost-szej formie i bez potęg dolnych. Zastosuj dwukrotnie wzór na różnicę iloczynu.

121. Policz różnicę z funkcji $f(x) = \sum_{i=0}^{x} 3 \cdot i^2 - 7$.

122. Ile różnych słów 5-literowych można utworzyć ze słowa LALKA (tzn. z pięciu klocków z literami L, L, A, A, K)? Ile różnych słów 4-literowych można utworzyć ze słowa LALKA? Ile różnych słów 3-literowych można utworzyć ze słowa LALKA?

123. Sprawdź, czy $10201^{17} - 10201$ jest podzielna przez 17 (wykorzystaj małe twierdzenie Fermata).

124. Udowodnij, że $\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$.

125. Rozwiąż metodą czynnika sumacyjnego rekurencję

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ P_n = 3P_{n-1} + 3^n n^2 \quad \text{dla } n > 0. \end{cases}$$

126. Oblicz różnicę wielomianu $p(x)=2x^3-3x^2+4x$, zamieniając ten wielomian na wielomian potęg dolnych i różnicując potęgi dolne.

127. Policz $\sum_{k=0}^{n} (k^{\underline{3}} + 3k^{\underline{2}})$. Wynik przedstaw w postaci wielomianu potęg zwykłych.

128. Mamy klocki z literami AABBCCDEF. Ile różnych napisów możemy utworzyć wykorzystując w każdym napisie wszystkie klocki?

129. Na ile sposobów można wybrać w pokerze figurę zwaną „dwie pary”? Użyj pojęcia „typu dwóch par” oznaczanego jako „X,Y” (na przykład typ „5,W” oznacza, że mamy parę piątek, parę waletów i coś, co nie jest ani piątką ani waletem). Kolejność kart nie ma znaczenia.

130. Rozwiązać równanie: $\binom{x}{3}-\binom{x}{2}=0$, dla naturalnej liczby $x>2$.

131. W sklepie są piłki w siedmiu kolorach. Klient wybrał 3 piłki, każdą w innym kolorze. Na ile sposobów mógł kupić te piłki? Kolejność nie ma znaczenia.

132. W sklepie są jabłka, gruszki i pomarańcze. Klient kupił 7 owoców. Na ile sposobów mógł kupić owoce? Kolejność nie ma znaczenia.

133. 154 studentów zostało zapytanych, jaki przedmiot dodatkowy chcieliby wybrać w następnym semestrze, spośród trzech: historii, geografii i socjologii. 45 studentów wybrało tylko historię, 38 – tylko geografię, 21 – tylko socjologię. Ponadto 18 wybrało historię i geografię (i być może trzeci przedmiot), 9 – historię i socjologię (i być może trzeci przedmiot), 4 geografię i socjologię (i być może trzeci przedmiot), oraz 23 nie wybrało żadnego przedmiotu. Ilu studentów wybrało wszystkie trzy przedmioty? W rozwiązaniu użyj diagramów Venna i zasady włączania-wyłączania.

134. Czy prawdą jest, że $4|7^3–1$? Czy prawda jest, że $7|4^6–1$? Czy zamiast wykonywania obliczeń możemy zastosować tu małe twierdzenie Fermata?

135. Udowodnij, że $\sum x^{-1}\delta x = H_x + C$.

136. Oblicz sumę skończonego ciągu geometrycznego $\sum_{i=0}^{n} a \cdot q^i$ $(q \neq 1)$ wykorzystując metodę sumy nieoznaczonej.

137. Cztery osoby grają w karty. Po przerwie zmieniają zajmowane przy stole miejsca w ten sposób, by żadna z nich nie usiadła na tym samym krześle na którym siedziała wcześniej. Na ile sposobów mogą to zrobić?

138. Pięć osób (każda ma jeden samochód) wymieniają się na weekend swoimi samochodami. W tym celu wrzucają do urny kluczyki do samochodów i kolejno je losują. Jeżeli ktoś wylosuje kluczyki do swojego samochodu, to losuje ponownie, a następnie zwraca swoje kluczki do urny. Może się zdarzyć, że po wylosowaniu swojego samochodu urna będzie pusta (pozostałe cztery osoby już się wymieniły samochodami) - wtedy osoba ta zostanie na weekend ze swoim samochodem.

Ile może być różnych wyników takiego losowania, gdzie będzie dokładnie jedna para osób taka, że jedna z nich wylosowała samochód drugiej, a druga tej pierwszej? Kolejność nie ma znaczenia. Nie wypisuj wyników losowań (chyba że dla przykładu). Użyj odpowiedniej konstrukcji matematycznej.

139. Ile może być różnych wyników losowania opisanego wyżej, że będą dokładnie dwie pary osób takie, że w każdej parze jedna z osób wylosowała samochód drugiej, a druga tej pierwszej? Kolejność nie ma znaczenia. Nie wypisuj wyników losowań (chyba że dla przykładu). Użyj odpowiedniej konstrukcji matematycznej.

140. Zapisz wielomian $(1+x)^7$ w zwykłej postaci (jako suma jednomianów).

141. Siedem identycznych ołówków wkładamy do trzech pudełek: białego, czerwonego i czarnego. Żadne pudełko nie może być puste. Na ile sposobów można to zrobić? Użyj odpowiedniej konstrukcji matematycznej.

142. Mamy 10 różnych słów. Z trzech układamy pierwsze zdanie, z innych czterech drugie zdanie i z pozostałych trzech trzecie zdanie. Ile różnych 3-zdaniowych tekstów możemy zbudować?

143. Ile różnych liczb 9-cyfrowych można utworzyć z cyfr 1,2,...,9 tak, aby żadna cyfra w liczbie nie powtarzała się ? Oszacuj tę liczbę.

144. Grający w totolotka stawia na wylosowanie sześciu liczb, które wybiera się spośród liczb od 1 do 49. Ile zakładów należy zawrzeć, aby zagwarantować sobie sześć trafień? Oszacuj tę liczbę. Ile jest takich zakładów, w których żadna liczba nie jest przewidziana trafnie? Oszacuj prawdopodobieństwo takiego zdarzenia. A ile jest takich, w których co najwyżej jedna liczba jest przewidziana trafnie?

145. Uczestnik zakładów totalizatora piłkarskiego przepowiada wyniki 12 różnych spotkań piłkarskich. Jako wyniki spotkań w grę wchodzą: remis, zwycięstwo gospodarzy, zwycięstwo gości. Ile co najmniej kuponów należy oddać, aby mieć 12 trafień, tzn. przewidzieć właściwe wyniki wszystkich dwunastu spotkań? Oszacuj tę liczbę.

146. Ile jest sposobów ustawienia 5 mężczyzn i 4 kobiet w szeregu tak aby z obu stron każdej kobiety stali mężczyźni?

147. W kiosku mamy do wyboru 9 rodzajów różnych widokówek. Ile jest sposobów wysłania po jednej kartce do czterech znajomych?

148. Ile różnych ”wyrazów” można utworzyć ze słowa MATEMATYKA ?

149. Ile prób trzeba podjąć w najbardziej niesprzyjającym przypadku, aby otworzyć zamek szyfrowy, który ma 4 współosiowe pierścienie, a na każdym z nich znajduje się po sześć cyfr?

150. Policz różnicę z funkcji $g(x) = \sum_{k=1}^{n} 3 \cdot x^k$.

151. Ile różnych sznurów złożonych z 11 korali można zbudować mając do dyspozycji dowolną liczbę koralików czerwonych, białych, niebieskich i zielonych.

152. Rzucamy jednocześnie kostką czarną i kostką białą. Wyznaczyć liczbę rzutów, w których

a) liczba oczek, które ukazały się na białej kostce jest mniejsza od liczby oczek, które wypadły na czarnej kostce;

b) liczba oczek, które ukazały się na czarnej kostce nie jest mniejsza od liczby oczek, które wypadły na białej kostce.

153. Ile jest różnych wyników rzucając
(a) trzema jednakowymi kostkami jednocześnie?
(b) trzema różnokolorowymi kostkami jednocześnie?
(c) rzucając jedną kostką 3 razy?

154. Ile różnych dzielników naturalnych ma liczba a) 2310 ; b) 65536; c) 1000000; d) 18000.

155. Czy prawdą jest , że dla *n*>0 zachodzi $\sum_{i=n}^{2n-1} (2i+1) = 3n^2$?

156. Wśród 9 osób są dwie rodziny: 3-osobowa i 4-osobowa. Na ile sposobów można ustawić te 9 osób w szereg tak, aby przynajmniej jedna z tych rodzin stała w szeregu razem (tworzyła zwarty podszereg, zwartą grupę)?

157. Na koncercie ma wystąpić 10 osób: 4 piosenkarzy i 6 piosenkarek. Na ile sposobów można ustalić przebieg koncertu tak, aby występy kobiet i mężczyzn przeplatały się?

158. Niech $0 \le r < m < n$. Ile jest takich rozmieszczeń n rozróżnialnych kul w m rozróżnialnych szufladach, że co najmniej r szuflad pozostaje pustych? Kolejność kul w szufladzie nie ma znaczenia.

159. Posługując się interpretacją kombinatoryczną pokaż, że

$$\left\{ {n \atop l+m} \right\} \binom{l+m}{l} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k \atop l} \right\} \left\{ {n-k \atop m} \right\}.$$

160. Napisać na ile różnych sposobów można *k* przedmiotów rozmieścić w *n* pudełkach uwzględniając wszystkie możliwe zestawiania następujących warunków:

a) przedmioty są rozróżnialne lub nierozróżnialne.

b) pudełka są rozróżnialne lub nierozróżnialne.

c) każde pudełko może zawierać co najwyżej jeden przedmiot lub może zawierać dowolną liczbę przedmiotów.

161. Ile układów kart w pokerze to „Trójka”? Trójka to układ 5 kart wylosowanych z talii 52 kart, w którym występują trzy karty tej samej wysokości (np. trzy walety) i dwie karty różnej wysokości między sobą i różnej od tamtych trzech.

162. Policz czego jest więcej: (a) rozmieszczeń uporządkowanych 3 elementów w 5 pudełkach czy (b) 4 elementów w 4 pudełkach?

163. Po nocy spędzonej na nauce matematyki dyskretnej każdą ze 100 osób bolała głowa lub bolał brzuch lub miała wzmożone pragnienie. 60 osób bolała głowa, 35 osób bolał brzuch, 10 osób nie bolała ani głowa ani brzuch. Spośród 26 osób, które miały wzmożone pragnienie, 6 bolała głowa a 11 brzuch. Ile osób miało wszystkie wymienione wyżej objawy przeuczenia matematyki dyskretnej?

164. Na prywatce jest 5 par małżeńskich. Po zakończeniu każdy mężczyzna wychodzi z losowo wybraną kobietą. a) Ile jest wszystkich możliwości doboru takich par? b) W ilu przypadkach żaden mężczyzna nie wyjdzie ze swoją żoną? Podaj obie liczby.

165. Ile jest permutacji liczb 1; 2; 3; . . . n, w których liczby 1; 2; 3 nie tworzą trzech kolejnych wyrazów (niezależnie od porządku). Podaj wzór.

166. Narysuj trójkąt Stirlinga dla cykli.

167. Spośród 20 pracowników pewnej firmy 5 jest na urlopie. Spośród wszystkich 8, którzy mają zostać zwolnieni na urlopie jest 4. Ilu jest takich, którzy ani nie są na urlopie ani nie zostaną zwolnieni?

168. Narysuj trójkąt Stirlinga dla podziałów.

169. Wieczorem, po zajęciach, każdy 6 z pozostałych do końca studentów wychodzi w losowo wybranej kurtce. Na ile sposobów mogą ubrać kurtki tak, aby żaden nie wyszedł w swojej?

170. W skład 5-osobowej komisji mogą wejść przedstawiciele 10 narodowości. Na ile sposobów można wybrać komisje tak, aby nie składała się z przedstawicieli tylko jednej narodowości? Podaj liczbę.