Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2019
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

Zadania 1-100

Udowodnij, że $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ za pomocą diagramów Venna.

Udowodnij formalnie,

że $(A \subset B$ i $A \subset C) \Rightarrow A \subset B \cap C$ oraz

że $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$ (opercja ` to dopełnienie)

Sprawdź, czy prawdziwe są zdania:

$(A \cap B = A \cap C \Rightarrow B=C)$, $(A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B=C)$,

$(A \cup B = A \cup C \Rightarrow B=C)$, $(A \cup B \subset A \cap B \Rightarrow A=B)$, $(A \cap B = A' \cup B')$

Czy to prawda, że dla dowolnego zbioru S zbiór $\mathcal{P}(S)$ ma co najmniej 2 elementy?

Udowodnij, że $\varnothing \subset \{\varnothing\}$, $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, ((S jest zbiorem) $\Rightarrow$ to $\varnothing \subset S$).

Czy to prawda, że $[0, 1] \setminus (0, 1) = \{0, 1\}$?

Wyznacz zbiór $[0, 3] \setminus [2, 6]$ oraz zbiór $[0, 3]'$ (operacja ` to dopełnienie).

Wypisz elementy $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, gdzie $A=\{a, b\}$.

Wypisz elementy $\mathcal{P}(A\times B)$, gdzie $A=\{a, b\}$, $B=\{0,1\}$.

Udowodnij, że odejmowanie zbiorów nie jest działaniem przemmiennym.

Czy suma dwóch relacji równoważności w X jest równoważnością w X?

Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów $(A\setminus B)\cup B=A$?

Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów $A\oplus B=\emptyset$ wtw $A=B$?

Wyznacz obraz zbioru {-2, -1, 0} przez funkcję f:R$\rightarrow$R; $f(x)=x$.

Czy prawdą jest, że $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ oraz $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$?

Czy to prawda, że dla dowolnych R_1, $R_2 \subset X^2$ zachodzi
$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$?

Operacją *n*-argumentową w zbiorze *X* nazywamy funkcję z X^n w *X*.
Czy +, −, · , / są 2-argumentowymi operacjami w R?

Zdefiniuj 3-argumentową operację o przepisie x^n+y^2+5.

Mamy funkcję z dziedziny NxN w N postaci f(n,k)=min(n,k). Znajdź $f^{-}(4)$,
czyli przeciwobraz czwórki.

Pokaż, że 2^{12}-1 nie jest liczbą pierwszą i rozłóż na czynniki (wykorzystaj małe twierdzenie Fermata).

Pokaż, że 10201^{17}–10201 jest podzielna przez 17 (wykorzystaj małe twierdzenie Fermata).

Udowodnij indukcyjnie, że $8 \mid 5^{n+1}+2\cdot 3^{n}+1$.

Udowodnij indukcyjnie, że $73 \mid 8^{n+2}+9^{2n+1}$.

Niech *A* relacja w zbiorze *S*. Co to znaczy, że *xAAAy*, dla $x, y \in S$.

Wyznacz NWD liczby 4899 i 6396. Rozłóż te liczby na czynniki pierwsze i wyznacz NWW rozłożony na czynniki (bez wymnażania).

Rozłóż liczby 6399 i 4896 na czynniki pierwsze, wyznacz NWD oraz wyznacz NWW rozłożony na czynniki (bez wymnażania).

Co to są liczby doskonałe?

Udowodnij, że jeśli A zwrotna to $A \cap A^{-1}$ jest tolerancją.

Co to jest surjekcja?

Rozwiąż równanie: $\lfloor (2x-3)/4 \rfloor = (3x-4)/5$.

Przypomnij zasadę minimum.

Udowodnij, że $6 \mid 8^n - 2^n$ dla wszystkich liczb naturalnych.

Udowodnij, że $7 \mid 11^n - 4^n$ dla wszystkich liczb naturalnych.

Udowodnij, że $n^2 > n+1$ dla wszystkich naturalnych $n>1$.

Udowodnij, że suma sześcianów kolejnych liczb naturalnych to ich kwadrat sumy: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2$.

Udowodnij, że $10 \mid (n^5 - n)$ dla wszystkich liczb naturalnych.

Udowodnij, że $12 \mid (10^n - 4)$ dla $n>1$

Czy potrafisz odczytać litery: $\kappa \ \lambda \ \mu \ \nu \ \xi \ o \ \pi$?

Uzasadnij, że $\forall n \in Z$: $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$

Narysuj funkcję $x \to \lfloor x/2 \rfloor + \lceil x/2 \rceil$ dla $x \in R$

Narysuj funkcję $x \to x - \lfloor x \rfloor$ dla $x \in R$

Rozwiąż równanie: $\lfloor (3x-2)/4 \rfloor = (2x-1)/5$.

Rozwiąż równanie: $\lfloor (3x-4)/5 \rfloor = (2x-1)/3$.

Zapisz przy użyciu symboli sumy skończonej:

$$1 + (1 + \tfrac{1}{2}) + \ldots + (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + {}^{1}/_{n}).$$

Udowodnij $(2n)! \geq (2n)^n$ dla $n>0$

Czy to prawda, że $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n}{2}\cdot(n+1)\right)^2$ dla $n\geq 0$

Udowodnij, że $(1 + {}^{1}/_{n})^n \leq n+1$ dla $n>0$

Czy to prawda, że $37^{100}-37^{20}$ jest wielokrotnością 10?

Oblicz: $\sum_{i=1..100} (-1)^i$.

Rozwiąż równanie: $\lfloor(3x-4)/5\rfloor = (x-2)/3$.

Weźmy zdanie $p(n)$ postaci „n^2+5n+1 jest liczbą parzystą". Udowodnij, że dla każdego naturalnego $k>0$ z $p(k)$ wynika $p(k+1)$. Dla jakich liczb prawdziwe jest $p(k)$?

Znajdź postać zwartą wzoru

$$\begin{cases} s_0=2 \\ s_1=-1 \\ s_{n+2}=2\cdot s_{n+1} + 8\cdot s_n \end{cases}$$

Przeczytaj litery greckie $\nu\ \iota\ \sigma\ \rho\ \varepsilon\ \omega\ \mu\ \phi\ \xi$.

Wykazać, że $\sum_{(k=0..n)} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}$, gdzie F_i to liczby Fibonaccciego.

Wykazać, że $\sum_{(k=0..2n)} (-1)^k F_k = F_{2n-1} - 1$ dla $n \geqslant 1$

Czy to prawda, że $37^{20}-1$ jest wielokrotnością 10?

Udowodnij, że $10 \mid 37^4-1$.

Udowodnij indukcyjnie, że $4+10+16+...+(6n-2) = n(3n+1)$.

Udowodnij indukcyjnie, że $2 \mid n^2+5n+1$.

Znajdź x, y takie, że ax+by=NWD(a,b), gdzie a=54, b=99.

Sprawdź, czy to prawda, że $\lfloor \log 223344 \rfloor < \lfloor \lg 234 \rfloor$.

Znajdź x, y takie, że ax+by=NWD(a,b), gdzie a=136 , b=84 .

Ile cyfr ma liczba dziesiętna *k*?

Zdefiniuj dowolną relację spójną na zbiorze R = $\{0,1\}^4$.
Co to jest relacja przeciwsymetryczna?

Ile wynosi suma wyrazów ciągu Fibonacciego od 5 do 15-tego, czyli $5+8+13+21+34+55+89+144+233+377+610$ (proszę tego nie dodawać, tylko użyć wzoru)?

Policz Φ^{10} (jako funkcję liniową złotej liczby Φ).

Niech x, y dowolne liczby rzeczywiste i $x<y$. Ile liczb całkowitych zawiera przedział $[x, y)$?

Co to jest funkcja charakterystyczna zbioru *A* w przestrzeni *S*?

Oszacuj s_{20} dla ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie:

$$\begin{cases} s_0=7 \\ s_1=2 \\ s_{n+2}=s_{n+1}+2s_n \quad \text{dla } n\geq 1 \end{cases}$$

Znajdź wzór zwarty dla

$$\begin{cases} a_0=0 \\ a_1=-10 \\ a_n=-3a_{n-1}+4a_{n-2} \text{ dla } n>1 \end{cases}$$

Znajdź wzór zwarty dla

$$\begin{cases} s_0=2 \\ s_1=5 \\ s_n=5s_{n-1}-6s_{n-2} \text{ dla } n>1 \end{cases}$$

Użyj algorytmu Euklidesa do obliczenia NWD(101,1001).

Przypomnij cztery lematy dotyczące funkcji podłogi i sufitu:

$\lceil x \rceil = n$ wtw

$\lceil x \rceil = n$ wtw

$\lfloor x \rfloor = n$ wtw

$\lfloor x \rfloor = n$ wtw

Rozwiąż następujące równanie rekurencyjne (postaw hipotezę i udowodnij indukcyjnie):

$l_0 = 1$, $l_n = l_{n-1}+n$ dla $n>0$

Użyj rozszerzonego algorytmu Euklidesa do wskazania współczynników x, y takich, że NWD(14259,3521)=14259x+3521y.

Napisz litery greckie: małe - ypsilon, chi, ro, duże - dzeta i eta.

Udowodnij indukcyjnie, że $16 \mid 5^n-4n-1$.

Dla liczb Fibonacciego $f_{14}=377$ i $f_{15}=610$ oblicz f_{29}.

Użyj rozszerzonego algorytmu Euklidesa do wskazania współczynników x, y takich, że $NWD(120,162)=120x+162y$.

Udowodnij, że jeżeli p jest liczbą pierwszą to $(a+1)^p - a^p -1$ jest podzielna przez p. Dla dowodu rozłóż potęgę sumy na sumę potęg.

Napisz litery greckie: małe – ksi, lambda, gamma, duże – chi, mi, teta.

Użyj rozszerzonego algorytmu Euklidesa do wskazania współczynników x, y takich, że $NWD(25,115)=25x+115y$.

Udowodnij przy pomocy zasady minimum, że $3n^2+3n+1<3n$.

Napisz litery greckie: małe – omega, sigma, ni i duże – psi, ro, lambda.

Wykazać, że $\sum_{k=1}^{n} podłoga(\frac{k}{2}) = podłoga(\frac{n^2}{4})$ dla $n \geq 0$.

Oblicz 14^{20} mod 17.

Oblicz 11^{99} mod 13.

Oblicz 50^{31} mod 31.

Wykaż, że $\sum_{k=1}^{6} k^{18} \equiv -1 \ mod\ 7$.

Udowodnij indukcyjnie, że $3n^2+3n+1<3^n$.

Znajdź resztę z dzielenie liczby $3^{80}+7^{80}$ przez 10.

Liczby Fermata to liczby postaci $fer_n = 2^{2^n}+1$. Pokaż, że $fer_{n+1} = \prod_{i=0}^{n} fer_i + 2$.

Czy istnieją liczby całkowite *n*, *m* spełniające równanie $123n+141m=18$?

Rozwiąż równanie $\left\lceil \frac{1}{3} \cdot x - 1 \right\rceil = 2x-1$.

Udowodnij przez indukcję, że $48 \mid (7^{2n} - 1)$, $n \geq 1$.

Oblicz Φ^{10} jako funkcję liniową złotej liczby Φ.

Wykaż, że suma dowolnych dziesięciu kolejnych liczb ciągu Fibonacciego jest podzielna przez 11.