Matematyka dyskretna

© Andrzej Łachwa, UJ, 2012
andrzej.lachwa@uj.edu.pl

13/14

Grafy – podstawowe definicje

Graf to para G=(V, E), gdzie V to niepusty i skończony zbiór, którego elementy nazywamy **wierzchołkami** lub węzłami, E to skończony zbiór z powtórzeniami jedno i dwuelementowych podzbiorów V, zwanych **krawędziami**.

Jednoelementowe podzbiory V nazywamy **pętlami**, a podzbiory powtarzające się nazywamy **krawędziami wielokrotnymi.**

Graf prosty to graf G=(V, E), w którym E jest zbiorem dwuelementowych podzbiorów V.

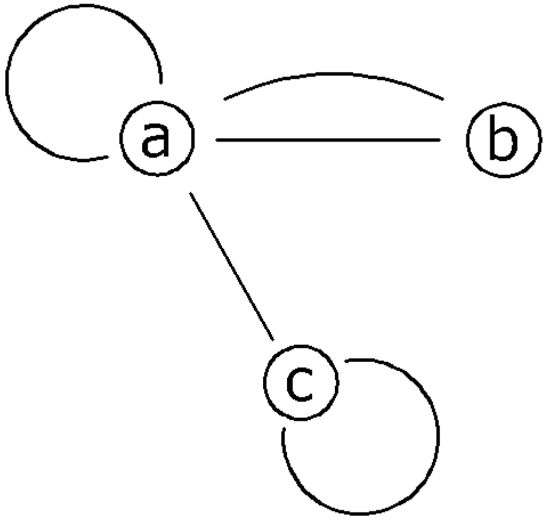
A zatem graf prosty to graf bez pętli i bez krawędzi wielokrotnych.

Krawędź łącząca *v* z *w* oznaczana będzie jako *vw*. Jeśli istnieje krawędź *vw* to mówimy, że *v* i *w* są **sąsiadami**; oraz że krawędź *vw* jest **incydentna** do *v* oraz incydentna do *w.* Ponadto, dla grafu G symbolem V(G) będziemy oznaczać jego zbiór wierzchołków, zaś symbolem E(G) jego zbiór krawędzi. Czasem, dla odróżnienia grafu od grafu prostego, graf będziemy nazywać też *grafem ogólnym*.

Często spotyka się w literaturze definicję, że **stopień wierzchołka** *v* w grafie G to liczba krawędzi incydentnych z *v*. **Definicja powyższa jest poprawna jedynie dla grafów prostych. W grafie ogólnym stopień wierzchołka trzeba zdefiniować inaczej, a mianowicie, że jest to suma podwojonej liczby pętli {v} i liczby krawędzi {v,w} nie będących pętlami.**

Stopień wierzchołka *v* oznaczany jest jako deg(*v*) lub deg *v*.

Przykład: graf ogólny



deg(a)=5

deg(b)=2

deg(c)=3

G = (V, E)

V = {a,b,c}

E = {{a}, {a,b}, {a,b}, {a,c}, {c}}

Twierdzenie

Jeśli G=(V, E) jest grafem ogólnym, to $\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$

A zatem liczba wierzchołków o nieparzystym stopniu jest parzysta.

Dowód

Każda krawędź, która nie jest pętlą, jest incydentna do dwóch wierzchołków. Zliczając krawędzie incydentne do kolejnych wierzchołków, a następnie sumując te wartości, każda krawędź vw zostanie zliczona dwa razy: raz przy rozpatrywaniu wierzchołka v, a drugi raz przy w. Pętla zawsze liczone są podwójnie. Zatem mamy podwojoną liczbę krawędzi.

Dla grafów prostych G=(V, E), G_1=(V_1, E_1), G_2=(V_2, E_2) definiujemy następujące pojęcia:

- **suma grafów** $\mathbf{G}_1 \cup \mathbf{G}_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$,
- **przecięcie grafów** $\mathbf{G}_1 \cap \mathbf{G}_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$,
- **różnica grafów** $\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2 = (V_1 - V_2, E_1 - E_2)$,
- **podgraf** grafu G to graf H, w którym $\mathsf{V}(\mathbf{H}) \subseteq \mathsf{V}(\mathbf{G})$ i $\mathsf{E}(\mathbf{H}) \subseteq \mathsf{E}(\mathbf{G})$,

które nie budzą żadnych wątpliwości interpretacyjnych. W przypadku grafów ogólnych sprawa nie jest już taka prosta. Zbiory E, E_1, E_2 są wówczas zbiorami z powtórzeniami.

Skończony **zbiór z powtórzeniami** $X=<\underbrace{x_1, x_1,\ldots}_{k_1}\ \underbrace{x_2, x_2, \ldots}_{k_2}\ \underbrace{x_3, x_3, \ldots}_{k_3}\ \ldots\ \underbrace{x_n, x_n, \ldots}_{k_n}>$

to rodzina elementów, w której x_1 powtarza się k_1 razy, x_2 powtarza się k_2 razy, itd. aż do x_n które powtarza się k_n razy. Zbiór taki zapisujemy również w postaci $X = <k_1 * x_1, k_2 * x_2, k_3 * x_3, \ldots k_n * x_n>$, a liczby $k_1, k_2, \ldots k_n$ nazywamy krotnościami. Inny sposób zapisania takiego zbioru to:
$X = <\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}, \{(x_1, k_1), (x_2, k_2), \ldots (x_n, k_n)\} >$.

Moc zbioru z powtórzeniami to suma krotności jego elementów.

Przypomnijmy, że podzbiór skończonego zbioru z powtórzeniami $X = <k_1 * x_1, k_2 * x_2, \ldots k_n * x_n>$ może być wyznaczony przez wektor $(m_1, m_2, \ldots m_n)$, gdzie $0 \leq m_1 \leq k_1$, $0 \leq m_2 \leq k_2$, … $0 \leq m_n \leq k_n$. Liczba podzbiorów skończonego zbioru z powtórzeniami o krotnościach $k_1, k_2, \ldots k_n$ jest równa $(k_1+1)(k_2+1) \ldots (k_n+1)$.

Suma dwóch zbiorów z powtórzeniami jest tworzona przez określenie krotności każdego elementu w sumie jako maksimum krotności tego elementu w składnikach sumy. Odpowiednio dla iloczynu będzie to minimum krotności, a dla różnicy – ograniczona (od dołu przez 0) różnica krotności.

W przypadku takich zbiorów można również mówić o „krotnościowej" sumie zbiorów, w której krotność elementu to suma algebraiczna krotności tego elementu w składnikach.

<a, a, b, c> ⊕ <a, b, b> = <a, a, a, b, b, b, c>

Dla grafów ogólnych $G_1=(V_1, E_1)$, $G_2=(V_2, E_2)$ **suma grafów** $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, przy czym druga operacja sumy dotyczy zbiorów z powtórzeniami.

Podobnie trzeba zdefiniować iloczyn grafów ogólnych i różnicę grafów ogólnych, a także w miarę potrzeb sumę „krotnościową” grafów.

Podgraf grafu ogólnego G=(V, E) to graf ogólny H, w którym $V(\mathbf{H}) \subseteq V(\mathbf{G})$ i $E(\mathbf{H}) \subseteq E(\mathbf{G})$, ale to drugie zawieranie jest operacją zawierania się zbiorów z powtórzeniami, zdefiniowaną wyżej.

Restrykcja grafu prostego $G=(V, E)$ do podzbioru $X \subseteq V$ to
$G|_X = (X, \{\{v,w\}: v \in X, w \in X, \{v,w\} \in E\})$, zwany również podgrafem indukowanym.

Rozszerzenie na grafy ogólne jest oczywiste.

Iloraz grafu prostego G przez relację równoważności $\theta \subseteq V \times V$ na zbiorze jego wierzchołków to graf postaci

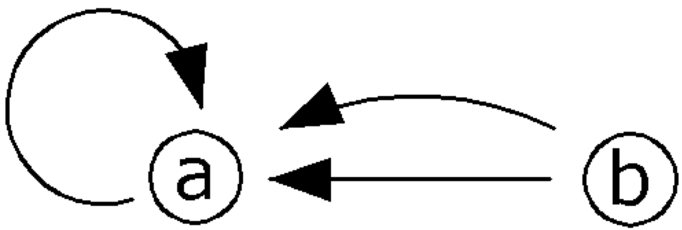
$\mathbf{G}/\theta = (V/\theta, \{\{v/\theta, w/\theta\} : \{v, w\} \in E\})$, przy czym $(v, w) \notin \theta$.

W tym przypadku rozszerzenie na grafy ogólne nie jest trywialne. Można np. mówić o ilorazie grafu prostego, który to iloraz jest grafem ogólnym, w którym krawędź między klasami abstrakcji jest wielokrotna, a jej krotność wynika z liczby krawędzi między elementami tych klas w grafie prostym.

Ściągnięcie zbioru wierzchołków $X \subseteq V$ w grafie prostym G=(V, E) to szczególny przypadek ilorazu $\mathbf{G}/\theta$, w którym klasy równoważności wszystkich wierzchołków spoza *X* są jednoelementowe, a *X* stanowi dodatkową klasę, tzn. $V/\theta = \{\{v\} : v \in V - X\} \cup \{X\}$. W ten sposób zbiór *X* został ściągnięty do punktu, którego sąsiadami są sąsiedzi jakiegokolwiek wierzchołka z *X*. Z drugiej strony, jeśli $\theta \subseteq V \times V$ jest relacją równoważności o klasach $X_1, \ldots, X_k$, to ściągając w grafie G kolejno zbiory $X_1, \ldots, X_k$ otrzymamy graf ilorazowy $\mathbf{G}/\theta$.

Graf skierowany (lub inaczej *digraf*) to para $D = (V, E)$, gdzie V jest zbiorem *wierzchołków*, zaś E jest zbiorem *krawędzi skierowanych*, czyli $E \subseteq V \times V$.

Krawędź digrafu przestawiamy graficznie jako strzałkę ukazującą kierunek uporządkowania elementów w parze.



Graf szkieletowy digrafu D to graf otrzymany z D poprzez zaniedbanie (usunięcie) kierunku krawędzi, ale nie samych krawędzi.

Graf pusty to graf bez krawędzi, zwany często *antykliką*. Antyklikę o *n* wierzchołkach oznaczać będziemy przez $\mathcal{A}_n$.

Graf pełny to graf, w którym każde dwa wierzchołki połączone są krawędzią. Graf pełny nazywany jest także *kliką* i oznaczany przez $\mathcal{K}_n$, gdzie *n* jest liczbą jego wierzchołków.

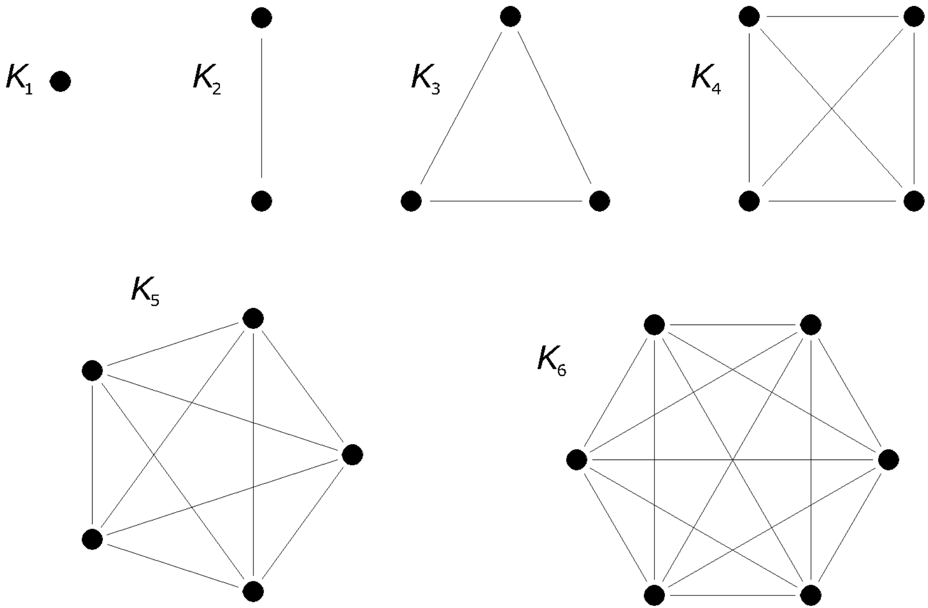
Twierdzenie

Liczba krawędzi w klice $\mathcal{K}_n$ wynosi $\frac{n(n-1)}{2}$.

Graf dwudzielny to graf $\mathrm{G} = (V, E)$, w którym zbiór V da się podzielić na dwa rozłączne podzbiory V_1 oraz V_2 tak, by żadne dwa wierzchołki w obrębie tego samego podzbioru V_i nie były sąsiadami. Czasem, dla podkreślenia takiego podziału, graf dwudzielny będziemy oznaczać przez $(V_1 \cup V_2, E)$. Zauważmy jednak, że podział taki nie jest jednoznaczny, np. w antyklice A_n dowolny podział zbioru wierzchołków na dwa podzbiory jest podziałem dwudzielnym.

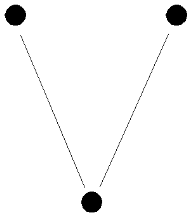
Pełny graf dwudzielny to graf dwudzielny $\mathrm{G} = (V_1 \cup V_2, E)$, w którym każdy wierzchołek z V_1 jest połączony z każdym wierzchołkiem z V_2. Pełny graf dwudzielny oznaczać będziemy przez $K_{r,s}$, gdzie *r* jest rozmiarem V_1, a *s* rozmiarem V_2.

Przykłady grafów pełnych

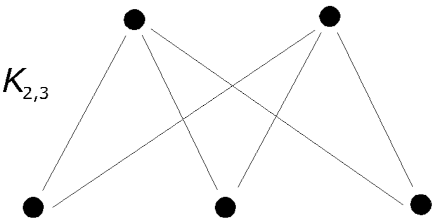


Przykłady pełnych grafów dwudzielnych

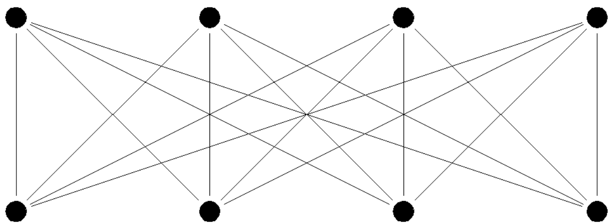
$K_{1,2}$



$K_{2,3}$



$K_{4,4}$



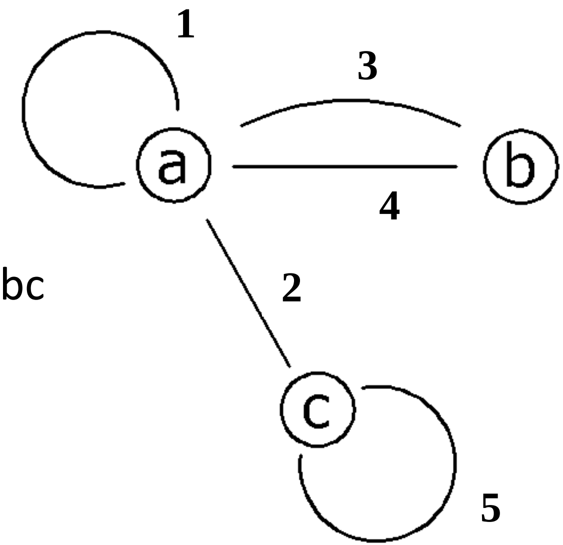
Reprezentacje

Pierwszą wygodną reprezentacją grafu jest **lista list**, czyli lista nazw wierzchołków, gdzie po każdej nazwie wierzchołka występuje lista nazw jego wierzchołków sąsiednich.

Drugą reprezentacją jest **macierz sąsiedztwa**. Dla grafu o n wierzchołkach Jest to macierz $n \times n$, której wyraz o indeksach i, j jest równy liczbie krawędzi łączących wierzchołek i-ty z j-tym.

Trzecią reprezentacją jest **macierz incydencji**. Dla grafu o n wierzchołkach i m krawędziach jest to macierz $n \times m$, której wyraz o indeksach i, j jest równy 1 jeżeli wierzchołek i-ty jest incydenty z krawędzią j-tą, oraz 0 w przeciwnym razie.

W przypadku diagrafów reprezentacje te są odpowiednio modyfikowane.



aabbc
baa
cca

	a	b	c
a	1	2	1
b	2	0	0
c	1	0	0

	1	2	3	4	5
a	1	1	1	1	0
b	0	0	1	1	0
c	0	1	0	0	1

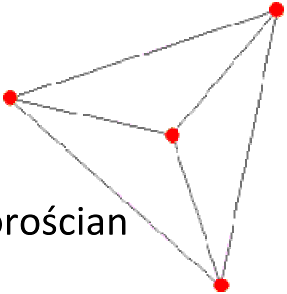
Graf, w którym każdy wierzchołek ma ten sam stopień nazywamy **grafem regularnym**. Jeśli każdy wierzchołek ma stopień r, to graf nazywamy **regularnym stopnia *r***.

Graf pusty jest grafem regularnym stopnia 0.

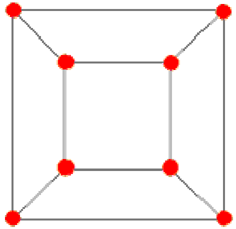
Grafy regularne stopnia 3 nazywamy **grafami kubicznymi**.

Graf pełny jest grafem regularnym stopnia n-1.

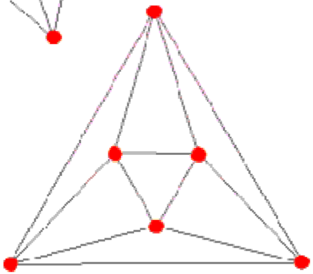
Grafy platońskie to grafy (regularne) utworzone z krawędzi i wierzchołków wielościanów foremnych:



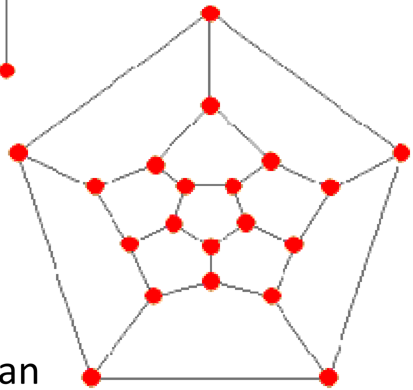
czworościan



sześcian

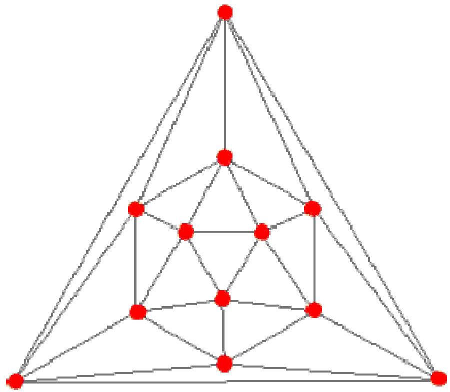


ośmiościan



dwunastościan

dwudziestościan



Marszruta w grafie G z wierzchołka *w* do wierzchołka *u* to skończony ciąg krawędzi w postaci $wv_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}u$.

W skrócie marszrutę taką oznaczamy przez

$$w \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{k-1} \to u,$$

przy czym strzałki oznaczają tu krawędzie nieskierowane!

Wierzchołek *w* nazywać będziemy <u>początkowym</u>, a *u* <u>końcowym</u> wierzchołkiem marszruty. Marszruta <u>zamknięta</u> to marszruta kończąca się w punkcie wyjścia, czyli taka, w której $w = u$. <u>Długość marszruty</u> $w \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{k-1} \to u$ to liczba jej krawędzi.

Uwaga: niektóre wierzchołki, a nawet krawędzie, mogą powtarzać się w marszrucie!

Marszruta może być również zdefiniowana w grafach skierowanych. Definiuje się ją analogicznie, uwzględniając jednak kierunek krawędzi. Marszruta taka, zgodna z kierunkiem krawędzi nazywana jest **marszrutą skierowaną**.

Droga (albo ścieżka) to marszruta bez powtarzających się wierzchołków.

Cykl to marszruta zamknięta, w której jedynym powtarzającym się wierzchołkiem jest jej początek (będący oczywiście również jej końcem).

Czasem wygodnie jest traktować marszrutę w grafie $\mathbf{G}$ (a więc w szczególności również cykle i ścieżki) jako podgraf

$$\mathbf{M} = (\mathsf{V}(\mathbf{M}), \mathsf{E}(\mathbf{M})) := (\{v_0, \ldots, v_k\}, \{\{v_0, v_1\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}\}).$$

Graf spójny to graf, w którym między dwoma dowolnymi wierzchołkami istnieje droga. **Graf niespójny** to graf, który nie jest spójny.

Spójna składowa grafu $\mathbf{G} = (V, E)$ to maksymalny (w sensie inkluzji) podzbiór $X \subseteq V$, indukujący graf spójny $\mathbf{G}|_X$.

Dowolny graf $\mathbf{G}$ rozpada się na spójne składowe, tworzące podział zbioru V. Grafy spójne mają jedynie jedną spójną składową, w przeciwieństwie do grafów niespójnych posiadających ich więcej.

Rozkład na spójne składowe wyznacza relację równoważności $\sigma \subseteq V \times V$, dla której graf ilorazowy $\mathbf{G}/\sigma$ jest antykliką.

Wierzchołek izolowany to wierzchołek nie posiadający sąsiadów.

Punkty izolowane tworzą jednoelementowe spójne składowe.

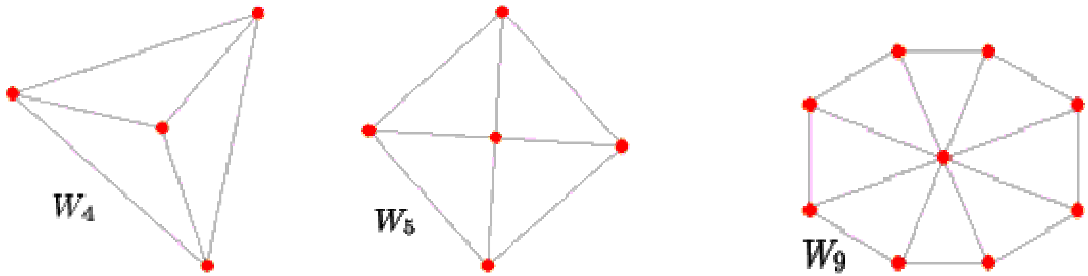
Intuicyjnie wydaje się, że graf spójny powinien mieć dostatecznie dużo krawędzi w stosunku do liczby wierzchołków. Okazuje się jednak, że w grafie spójnym $\mathbf{G} = (V, E)$ możemy wymusić jedynie $|V| - 1$ krawędzi. Z drugiej jednak strony, gdy graf $\mathbf{G}$ ma więcej niż $|V| \cdot (|V| - 1)/2$ krawędzi, to musi być spójny. Rezultaty te można uzyskać z bardziej ogólnego wyniku:

Twierdzenie

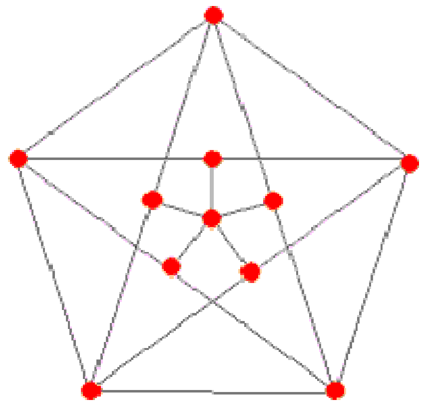
W grafie prostym $\mathbf{G} = (V, E)$ o k składowych spójnych liczba jego krawędzi spełnia nierówności $|V| - k \le |E| \le \frac{(|V|-k)(|V|-k+1)}{2}$.

Ponadto, są to najlepsze możliwe ograniczenia, tzn. istnieje graf prosty $\mathbf{G} = (V, E)$ o dokładnie *k* składowych spójnych, w którym $|E| = |V| - k$, a także istnieje graf prosty $\mathbf{G} = (V, E)$ o dokładnie *k* składowych spójnych, w którym $|E| = \frac{(|V|-k)(|V|-k+1)}{2}$.

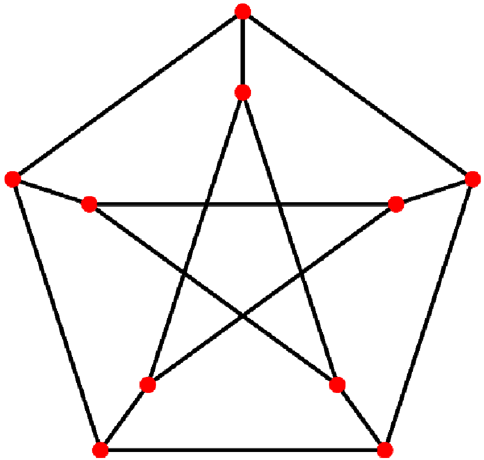
Koła to grafy powstałe przez dodanie do cyklu jeszcze jednego wierzchołka i połączenie tego wierzchołka ze wszystkimi wierzchołkami cyklu. Koło o *n* wierzchołkach oznaczamy W_n.



Graf Grötzscha



Graf Petersena

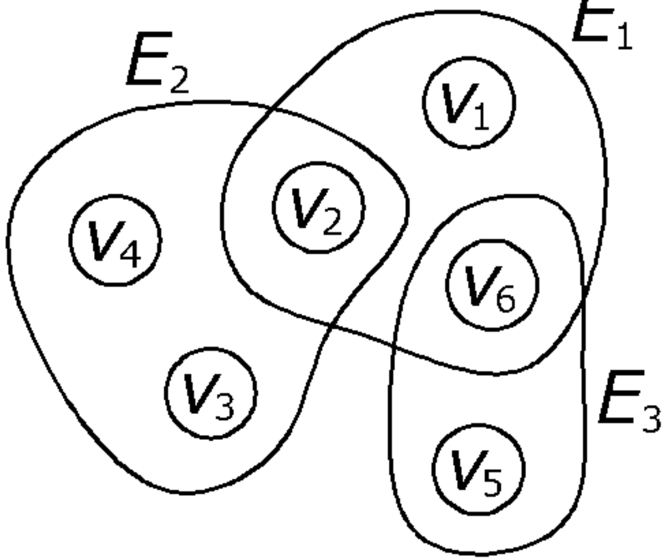


Hipergrafy

Hipergraf to para H = (V, E), gdzie V jest dowolnym, niepustym zbiorem wierzchołków; E jest podzbiorem zbioru P(V)–∅ wszystkich możliwych niepustych zbiorów, których elementy należą do V. Elementy E nazywamy **hiperkrawędziami**.

Macierz incydencji jest jedną z najpopularniejszych i najwygodniejszych metod reprezentacji hipergrafu. W macierzy incydencji wiersze odpowiadają krawędziom, a kolumny wierzchołkom hipergrafu. Jeśli element macierzy jest równy 1, to i-ta krawędź jest incydentna do j-tego wierzchołka. W przeciwnym przypadku element ten jest równy 0.

Przykładowy hipergraf H_1 zawiera sześć wierzchołków $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ oraz trzy hiperkrawędzie: $E = \{E_1, E_2, E_3\}$. Dwie hiperkrawędzie są incydentne do trzech wierzchołków: $E_1 = \{v_1, v_2, v_6\}$, $E_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$, natomiast trzecia krawędź jest incydentna do dwóch wierzchołków: $E_3 = \{v_5, v_6\}$.



Macierz incydencji dla hipergrafu H_1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hipergraf dualny

Dla każdego hipergrafu $H = (V, E)$ istnieje hipergraf dualny $H^* = (E, V)$, którego krawędzie odpowiadają wierzchołkom hipergrafu H, natomiast wierzchołki - krawędziom.

Macierz incydencji *A** hipergrafu dualnego H^* jest transponowaną macierzą *A* hipergrafu H.

Przykładowa macierz A_1^* hipergrafu dualnego do hipergrafu H_1 ze strony poprzedniej.

$$A_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Źródła:

Robin J. Wilson: Wprowadzenie do teorii grafów. WN PWN Warszawa 2007

Wykłady z matematyki dyskretnej 12-15, http://wazniak.mimuw.edu.pl

K. A. Ross, CH. R. b. Wright: Matematyka dyskretna. WN PWN 1999

J. Grygiel: Wprowadzenie do matematyki dyskretnej. AOW EXIT 2007

www.mini.pw.edu.pl/MiNIwyklady